

УДК 531.1:534

A. Б. КЫДЫРБЕКУЛЫ

ВЫСШИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлена академиком НАН РК К. А. Касымовым)

Исследуется резонанс по высшим частотам в нелинейной системе с мягкой характеристикой и нелинейно-вязким сопротивлением. Построены амплитудно-частотные характеристики. Исследовано влияние мягкой характеристики и нелинейно-вязкого сопротивления на поведение резонансных кривых.

В технике широко применяются материалы с физически нелинейными свойствами, которые ввиду их высоко демпфирующих свойств, применяются для виброзащиты динамических систем. Это – различные типы резин, каучуки и подобные им материалы. Движение таких систем моделируется нелинейными многомерными уравнениями, решение которых зачастую сводится к анализу нелинейных уравнений с одной степенью свободы [1]:

$$\ddot{x} + K_1 \dot{x} + K_2 \dot{x}^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = F_0 + F \cos \Omega t, \quad (1)$$

где K_1 и K_2 – коэффициенты составляющих нелинейно-вязкого сопротивления; α_1 и α_2 – коэффициенты линейной и мягкой характеристик, соответственно.

Известно, что в нелинейных системах наблюдается сложный колебательный процесс с широким спектром частот. Наряду с колебаниями по основной частоте, равной частоте внешнего воздействия, имеют место колебания с кратными частотами. Поэтому исследование колебаний нелинейных систем по основной частоте является лишь первым приближением в решении проблем их динамического анализа. Автор работы исследовал резонансные колебания по основной частоте системы (1) и вопросы их устойчивости. Поведение же резонансных кривых для гармоник высшего порядка и их устойчивость до сих пор не выяснены. Данная работа посвящена изучению указанной проблемы.

1. Резонансные колебания по первой и второй гармонике. При исследовании резонанса по высшим частотам в системе (1) используется метод разложения решения в ряд Фурье с неопределенными коэффициентами. При изучении основного резонанса достаточно рассмотреть основную гармонику. Здесь в качестве уточнения приближенного решения (1) берется первая и вторая гармоника колебательного процесса:

$$x = r_0 + r_1 \cos(\Omega t - \varphi_1) + r_2 \cos(2\Omega t - \varphi_2). \quad (2)$$

С применением известного метода гармонического баланса и приравниванием коэффициентов при свободном члене, а также при $\sin \Omega t$, $\cos \Omega t$, $\sin 2\Omega t$, $\cos 2\Omega t$ в левой и правой частях уравнения (1), получена система уравнений относительно неизвестных r_0 , r_1 , r_2 , φ_1 и φ_2 :

$$\begin{aligned} X_0 &= K_2 (0,5r_1^2 \Omega^2 + 2r_2^2 \Omega^2) + \alpha_1 r_0 + \alpha_2 (r_0^2 + 0,5r_1^2 + 0,5r_2^2) = F_0; \\ X_1 &= K_1 \Omega r_1 \sin \varphi_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 r_0 - \Omega^2) r_1 \cos \varphi_1 + r_1 r_2 (2K_2 \Omega^2 + \alpha_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = F_1; \\ Y_1 &= -K_1 \Omega r_1 \cos \varphi_1 + r_1 (\alpha_1 + 2\alpha_2 r_0 - \Omega^2) \sin \varphi_1 - r_1 r_2 (2K_2 \Omega^2 + \alpha_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ X_2 &= (2\alpha_2 r_0 + \alpha_1 - 4\Omega^2) r_2 \sin \varphi_2 - 2K_1 \Omega r_2 \cos \varphi_2 + 0,5r_1^2 (\alpha_2 - K_2 \Omega^2) \sin 2\varphi_1 = 0; \\ Y_2 &= (2\alpha_2 r_0 + \alpha_1 - 4\Omega^2) r_2 \cos \varphi_2 + 2K_1 \Omega r_2 \sin \varphi_2 + 0,5r_1^2 (\alpha_2 - K_2 \Omega^2) \cos 2\varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

После исключения в соотношениях (3) неизвестных фазовых углов φ_1 и φ_2 , получены выражения для амплитудно-частотных зависимостей основного резонанса и резонанса по второй гармонике:

$$\begin{cases} r_1^2(0,5K_2\Omega^2 + 0,5\alpha_2) + r_2^2(2K_2\Omega^2 + 0,5\alpha_2) + \alpha_1r_0 + \alpha_2r_0^2 = F_0; \\ r_1^2 \left[K_1^2\Omega^2 + B_1^2 + B_2^2r_2^2 + \frac{r_2^2B_2(K_1^2\Omega^2(8B_1 + 8B_3) - 2B_1B_3^2)}{r_1^2B_3B_4} - \frac{0,5B_1B_2B_4r_1^2}{B_3} \right] = F_1^2; \\ B_3^2r_2^2 + 4K_1^2\Omega^2r_2^2 = \frac{1}{4}r_1^4B_4^2, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha_1 + 2r_0\alpha_2 - \Omega^2; & B_2 &= \alpha_2 + 2K_2\Omega^2; \\ B_3 &= \alpha_1 + 2r_0\alpha_2 - 4\Omega^2; & B_4 &= \alpha_2 - K_2\Omega^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Фазовые углы φ_1 и φ_2 определяются как:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2K_1\Omega B_2 r_2^2 + 0,5K_1\Omega B_4 r_1^2}{0,5B_1B_4 r_1^2 - B_2 B_3 r_2^2}; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{2K_1\Omega + B_3 \operatorname{tg}2\varphi_1}{B_3 + 2K_1\Omega \operatorname{tg}2\varphi_1}. \quad (6)$$

Результаты численного анализа амплитудно-частотных характеристик в зависимости от величин жесткости и нелинейно-вязкого сопротивления представлены на рис. 1-5. В отличие от случая резонанса по основной гармонике (рис. 1), когда доминирующими колебаниями считаются колебания по частоте внешнего воздействия, здесь наблюдаются сложные резонансные явления (рис. 2-5). Имеют место бифуркации на АЧХ основного резонанса (жирные линии на рис. 2-5), вызванные колебаниями по второй гармонике, амплитуды которых достигают значительных величин (тонкие линии на рис. 2-5).

Наблюдаемая аномалия в виде петли на $r_1(\Omega)$ (рис. 2), вызванная появлением резонанса по второй гармонике, смещается при усилении нелинейной характеристики жесткости α_2 в область больших частот (рис. 3), тогда как увеличение нелинейно-вязкого сопротивления K_2 и амплитуды внешнего воздействия F_1 ведут к смещению зон неустойчивости резонанса по основной гармонике в область меньших частот (рис. 4 и 5, соответственно).

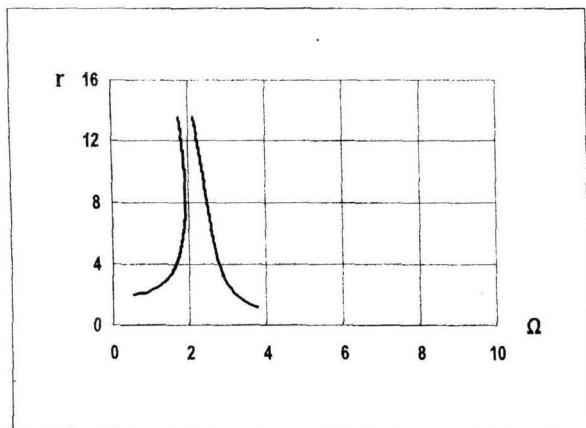


Рис. 1. Резонанс по основной гармонике.

$$K_1 = 0; K_2 = 0; \alpha_1 = 5; \alpha_2 = 0,2; F_0 = 5; F_1 = 10$$

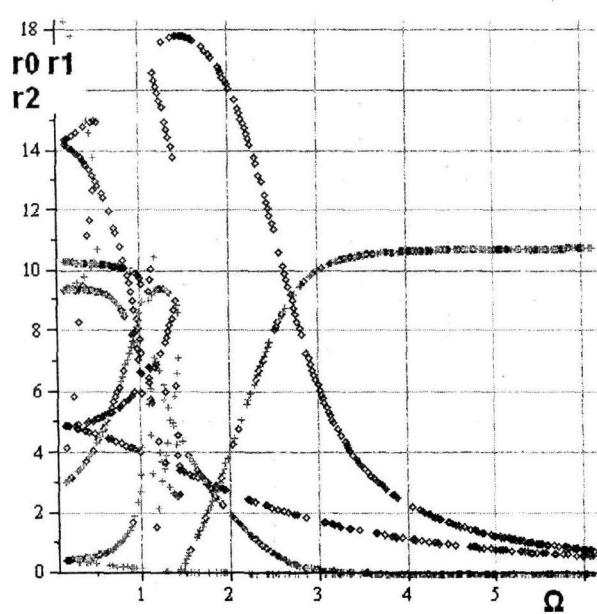


Рис. 2. Резонанс по высшим частотам.

$$K_1 = 0,33; K_2 = 0; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,2; F_0 = 34; F_1 = 25$$

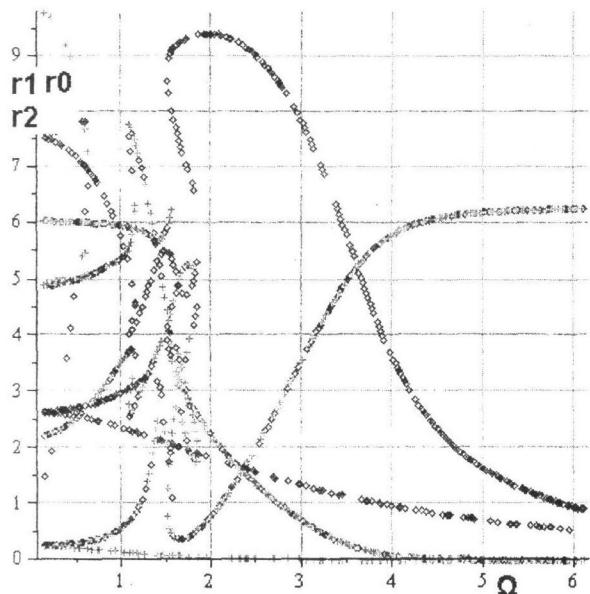


Рис. 3. Влияние α_2 на резонанс по высшим частотам.
 $K_1 = 0,33; K_2 = 0; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,7; F_0 = 34; F_1 = 25$

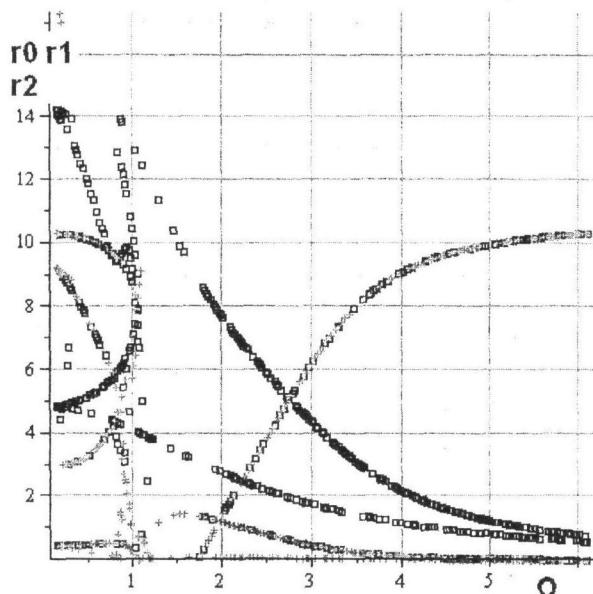


Рис. 4. Влияние K_2 на резонанс по высшим частотам.
 $K_1 = 0,33; K_2 = 0,2; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,2; F_0 = 34; F_1 = 25$

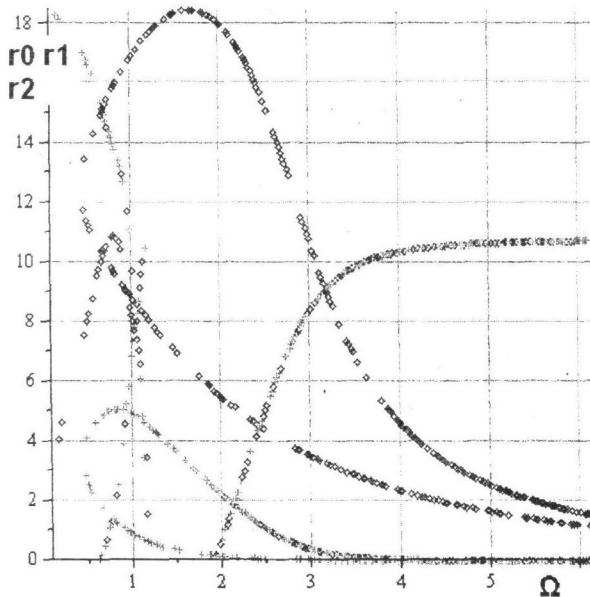


Рис. 5. Влияние K_2 на резонанс по высшим частотам.
 $K_1 = 0,33; K_2 = 0; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,2; F_0 = 34; F_1 = 50$

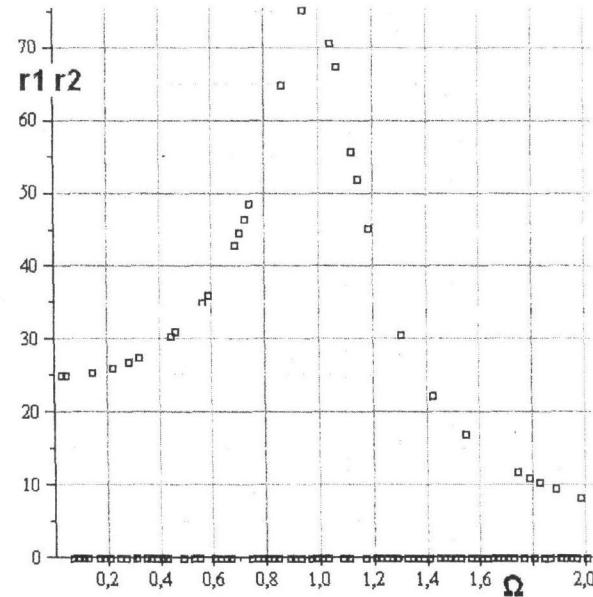


Рис. 6. Резонанс в линейной системе

При линеаризации модели (1) наблюдается отсутствие в колебательном процессе второй гармоники. Построенные в данном случае АЧХ есть известные в литературе АЧХ основного резонанса (рис.6), что подтверждает достоверность проведенных исследований.

2. Устойчивость колебаний по первой и второй гармонике. Одним из известных методов исследования устойчивости резонансных режимов колебаний является исследование устойчивости периодического решения нелинейной модели (1) по-Ляпунову. Рассматривается малое отклонение δx от периодического равновесного состояния $x = x_0 + \delta x$, где под x_0 понимается периодическое решение системы (1), устойчивость которого подлежит исследованию. При пренебрежении степенями δx выше первой, получено уравнение возмущенного состояния системы (1):

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + (K_1 + 2K_2 \dot{x}_0) \frac{d\delta x}{dt} + (\alpha_1 + 2\alpha_2 x_0) \delta x = 0. \quad (7)$$

Характер поведения малого возмущения δx во времени определяет устойчивость рассматриваемого решения x_0 : если решения уравнения возмущенного состояния (7) δx ограничены при $t \rightarrow \infty$, то x_0 по определению устойчиво; если $\delta x \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то x_0 – неустойчиво.

Задавая δx как:

$$\delta x = e^{-K_1 t/2} \eta, \quad (8)$$

уравнение возмущенного состояния (7) приводится к параметрическому уравнению типа Хилла относительно переменной η . Для случая резонанса по первой и второй гармонике, когда решение x_0 задается выражением (2), уравнение типа Хилла имеет вид:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta [\theta_0 + \theta_{1s} \sin \Omega t + \theta_{1c} \cos \Omega t + \theta_{2s} \sin 2\Omega t + \theta_{2c} \cos 2\Omega t + \theta_{3s} \sin 3\Omega t + \theta_{3c} \cos 3\Omega t + \theta_{4s} \sin 4\Omega t + \theta_{4c} \cos 4\Omega t] = 0, \quad (9)$$

где $\theta_0, \theta_{1s}, \theta_{1c}, \theta_{2s}, \theta_{2c}, \theta_{3s}, \theta_{3c}, \theta_{4s}, \theta_{4c}$ – есть функции частот, амплитуд и фаз колебаний $\Omega, r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ гармонических решений уравнения (1):

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \alpha_1 - \left(\frac{K_1}{2} \right)^2 - K_2^2 \Omega^2 (0,5r_1^2 + 2r_2^2); \\ \theta_{1s} &= (2\alpha_2 r_1 + K_2 r_1 \Omega^2) \sin \varphi_1 + K_1 K_2 r_1 \Omega \cos \varphi_1 - 2K_2^2 r_1 r_2 \Omega^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \\ \theta_{1c} &= (2\alpha_2 r_1 + K_2 r_1 \Omega^2) \cos \varphi_1 - K_1 K_2 r_1 \Omega \sin \varphi_1 - 2K_2^2 r_1 r_2 \Omega^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \\ \theta_{2s} &= (2\alpha_2 r_2 + 4K_2 r_2 \Omega^2) \sin \varphi_2 + 2K_1 K_2 r_2 \Omega \cos \varphi_2 + 0,5K_2^2 r_1^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_1; \\ \theta_{2c} &= (2\alpha_2 r_2 + 4K_2 r_2 \Omega^2) \cos \varphi_2 - 2K_1 K_2 r_2 \Omega \sin \varphi_2 + 0,5K_2^2 r_1^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_1; \\ \theta_{3s} &= 2K_2^2 r_1 r_2 \Omega^2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2); \\ \theta_{3c} &= 2K_2^2 r_1 r_2 \Omega^2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2); \\ \theta_{4s} &= 2K_2^2 r_2^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_2; \\ \theta_{4c} &= 2K_2^2 r_2^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_2; \end{aligned} \quad (10)$$

Анализ поведения уравнения возмущенного состояния зависит от его характеристического определителя:

$$\Delta \left(\frac{K_1}{2} \right) = \begin{vmatrix} \theta_0 + \left(\frac{K_1}{2} \right)^2 - \Omega^2 - 0,5\theta_{2c} & 0,5\theta_{2s} - K_1 \Omega & 0,5(\theta_{1c} - \theta_{3c}) & 0,5(\theta_{3s} - \theta_{1s}) \\ 0,5\theta_{2s} + K_1 \Omega & \theta_0 + \left(\frac{K_1}{2} \right)^2 - \Omega^2 + 0,5\theta_{2c} & 0,5(\theta_{1s} + \theta_{3s}) & 0,5(\theta_{1c} + \theta_{3c}) \\ 0,5(\theta_{1c} - \theta_{3c}) & 0,5(\theta_{1s} + \theta_{3s}) & \theta_0 + \left(\frac{K_1}{2} \right)^2 - 4\Omega^2 - 0,5\theta_{4c} & 0,5\theta_{4c} - 2K_1 \Omega \\ 0,5(\theta_{3s} - \theta_{1s}) & 0,5(\theta_{3c} + \theta_{1c}) & -0,5\theta_{4s} + 2K_1 \Omega & \theta_0 + \left(\frac{K_1}{2} \right)^2 - 4\Omega^2 + 0,5\theta_{4s} \end{vmatrix} = 0$$

задающего границы неустойчивости резонанса по высшим частотам, в частности, второй.

Для непосредственного же определения границ областей неустойчивости на резонансных кривых, значительно упрощающего задачу, применяется критерий Раусса-Гурвица [2] с построением характеристического определителя, использующего соотношение (3) для величин X_0, X_1, Y_1, X_2, Y_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_0}{\partial r_0} & \frac{\partial X_0}{\partial r_1} & \frac{\partial X_0}{\partial r_2} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial X_0}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial r_0} & \frac{\partial X_1}{\partial r_1} & \frac{\partial X_1}{\partial r_2} & \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial r_0} & \frac{\partial Y_1}{\partial r_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial r_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial r_0} & \frac{\partial X_2}{\partial r_1} & \frac{\partial X_2}{\partial r_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial r_0} & \frac{\partial Y_2}{\partial r_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial r_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial \varphi_2} \end{vmatrix} < 0. \quad (11)$$

Полученная квазианалитическая оценка областей неустойчивости в зависимости от параметров системы позволяет управлять нежелательными резонансными режимами колебаний.

Уточненное решение системы (1) дает более полное представление о реальных процессах, происходящих в нелинейных колебательных системах,

ЛИТЕРАТУРА

1. Амандосов А.А., Алмухамбетов С.С., Молдакулов Н.З. Колебания гибких тел произвольном повороте поперечных элементов // Вестник АН КазССР. 1987. №6. С. 60- 68.
2. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 423 с.

Резюме

Жұмсақ сипаттамасы мен сыйықсыз-тұтқырлы кедергісі бар сыйықсыз жүйенің жоғары жиіліктері резонансы зерттелінді. Амплитудалық-жіліліктік сипаттамалары салынған. Резонанстық кисықтар күйіне жұмсақ сипаттама мен сыйықсыз-тұтқырлы кедергінің әсері зерттелген.

Summary

The resonance on high frequencies in nonlinear system with soft characteristic and nonlinear-viscous resistance is researched. Amplitude-frequency characteristic is builded. Soft characteristic and nonlinear-viscous resistance influence on the behavior resonance curves are researched.

КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 10.03.08г.