УДК 517.946

*Ш.Н. КУТТЫКОЖАЕВА*

# МОДЕЛЬ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИИ ТОКА И ВИХРЯ СКОРОСТЕЙ

В этой работе исследуется $\varepsilon$ -регуляризация одной модели вязкой несжимаемой жидкости в переменных функции тока и вихря скоростей с учетом температур. Доказывается существование и сходимость обобщенного решения вспомогательной задачи. Получены равномерные априорные оценки.

Движение вязкой несжимаемой жидкости в переменных функции тока и вихря скоростей с учетом температур сводится к решению уравнения [1]:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = \mu\Delta\omega + \gamma\theta_y$$

$$\omega = \Delta\psi; \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + \psi_y \frac{\partial\theta}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial\theta}{\partial y} = \lambda\Delta\theta, \qquad (1)$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(x) \qquad \omega\big|_{t=0} = \omega_0(x), \quad \frac{\partial\theta}{\partial t}\bigg|_S = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_S = \psi\big|_S = 0, \quad t \in [0,T] \qquad (2)$$

здесь $\mu$ – коэффициент вязкости, $\Omega$ - область в $R^3$, $S$ - граница области $\Omega$, $\psi$ - функция тока, $f$ - массовая сила, $0 < \gamma = const$.

Система уравнений (1)-(2) является системой составного типа, поэтому непосредственное применение метода расщепления затруднительно. И для приближенного решения задачи (1)-(2) методом дробных шагов рассмотрим систему уравнений с малым параметром

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + Q_m\right) + \frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \psi_y^\varepsilon \omega_x^\varepsilon - \psi_x^\varepsilon \omega_y^\varepsilon =$$

$$= \Delta\omega^\varepsilon + \gamma\theta_y^\varepsilon, \; \omega^\varepsilon = \Delta\psi^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t} + \psi_y^\varepsilon \theta_x^\varepsilon - \psi_x^\varepsilon \theta_y^\varepsilon = \lambda\Delta\theta^\varepsilon, \qquad (3)$$

$$\theta^\varepsilon\big|_{t=0} = \theta_0(x) \qquad \psi^\varepsilon\big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi_1(x) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial n}\bigg|_S = \psi^\varepsilon\big|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\bigg|_S = 0, \quad t \in [0,T]$$

где $\psi_0(x) = \psi\big|_{t=0}$, $\psi_1(x) = \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0}$ находятся из системы (1)-(2). $Q_m(x)$ - функция известная, обеспечивающая условий

$$\frac{\partial^k\psi^\varepsilon}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^k\psi}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}, \quad \frac{\partial^k\theta^\varepsilon}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^k\theta}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}. \qquad (5)$$

Дальнейшие обозначения взяты из работы [2].

**Определение 1.** Обобщенным решением задачи (3)-(4) называются функции $\psi^\varepsilon(x,t)$, $\theta^\varepsilon(x,t)$:

$$\psi^\varepsilon \in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)), \quad \psi_t^\varepsilon \in L_2(0,T,L_2(\Omega)),$$

$\theta^\varepsilon \in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, удовлетворяющие следующим интегральным тождествам

$$\varepsilon\int_0^T\Big[\left(\psi_t^\varepsilon,\Phi_t\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\psi_y^\varepsilon\cdot\psi^\varepsilon,\Phi_x\right)_{L_2(\Omega)} -$$

$$-\left(\psi_x^\varepsilon\cdot\Delta\psi^\varepsilon,\Phi_y\right)_{L_2(\Omega)}\Big]dt -$$

$$-\mu\int_0^T\left(\Delta\psi^\varepsilon,\Delta\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt = \varepsilon\int_0^T\left(Q_m\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt -$$

$$-\gamma\int_0^T\left(\theta_y^\varepsilon,\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt - \varepsilon\left(\psi_1(x),\Phi(0)\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$\varepsilon\int_0^T\left(\theta^\varepsilon,\varphi_t\right)_{L_2(\Omega)}dt+$$

$$+\int_0^T\left(\theta^\varepsilon\psi_y^\varepsilon\varphi_x-\theta^\varepsilon\psi_x\varphi_y\right)_{L_2(\Omega)}dt=$$

$$=\lambda\int_0^T\left(\nabla\theta^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_{L_2(\Omega)}dt-\left(\theta_0(x),\varphi(0)\right)_{L_2(\Omega)}. \quad (6)$$

**Теорема 1.** *Пусть* $\psi_0(x)\in W_2^2(\Omega)$, $\psi_1(x)\in W_2^1(\Omega)$, $\theta_0(x)\in L_2(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (3)-(4) и имеет место:

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+$$

$$+\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T,W_2^1(\Omega))}\le C<\infty.$$

и оно сходится к обобщенному решению задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

**Доказательство.** Рассмотрим эквивалентную форму (6):

$$\int_0^T\left(\theta_t^\varepsilon,\varphi\right)_\Omega dt+\lambda\int_0^T\left(\nabla\theta^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_\Omega dt=$$

$$=\int_0^T\left(\theta^\varepsilon,\psi_y^\varepsilon\varphi_x-\psi_x^\varepsilon\varphi_y\right)_\Omega dt$$

при $\varphi=\theta^\varepsilon$:

$$\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\left\|\theta^\varepsilon\right\|^2dt+\lambda\left\|\nabla\theta^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q)}=$$

$$=\int_0^T(\theta^\varepsilon,\psi_y^\varepsilon\theta_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\theta_y^\varepsilon)_\Omega dt.$$

Для правой части справедливо тождество:

$$\int_0^T\int_\Omega(\theta^\varepsilon,\psi_y^\varepsilon\theta_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\theta_y^\varepsilon)d\xi dt=0.$$

Тогда получим

$$\left\|\theta^\varepsilon(T,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\lambda\left\|\nabla\theta^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}=\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow\quad\left\|\theta^\varepsilon(T,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2,$$

отсюда, и так как T – произвольное число, то

$$\forall t\le T:\ \left\|\theta^\varepsilon(t,x)\right\|^2\le\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2.$$

Далее легко вытекает оценка:

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\theta^\varepsilon(t,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\lambda\left\|\nabla\theta^\varepsilon(t,x)\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le$$

$$\le 2\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}<\infty \quad (7)$$

Теперь в интегральном тождестве возьмем $\Phi=\psi^\varepsilon(t,x)$ и получим:

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\left\|\nabla\psi^\varepsilon\right\|^2dt+\mu\left\|\Delta\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}=$$

$$=\varepsilon\int_0^T(Q_m,\psi^\varepsilon)_\Omega dt-\gamma\int_0^T(\theta_y^\varepsilon,\psi)_\Omega dt-$$

$$-\varepsilon(\psi_1(x),\psi(0))_\Omega \quad (8)$$

Оценивая правую часть как в [3], из (8) имеем:

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\frac{1}{2}\left\|\nabla\psi^\varepsilon(T,x)\right\|^2+\mu\left\|\Delta\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le$$

$$\le\delta\int_0^T\left\|\nabla\psi^\varepsilon\right\|^2dt+C_1\varepsilon^2+C_2\varepsilon+C_3, \quad (9)$$

$$\left\|\nabla\psi(T,x)\right\|^2\le\delta\int_0^T\left\|\nabla\psi(t,x)\right\|^2dt+C_1\varepsilon^2+$$

$$+C_2\varepsilon+C_3.$$

Далее, проводя аналогичные выкладки как в [3], из (8) имеем:

$$\varepsilon\left\|\psi_t\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\max_t\left\|\nabla\psi^\varepsilon(t,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\mu\left\|\Delta\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le C<\infty \quad (10)$$

Теперь умножим (4) на $\Delta\theta$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и оценивая некоторые из получаемых слагаемых, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\|\nabla\theta\right\|^2+\lambda\left\|\Delta\theta\right\|^2\le C\left\|\Delta\psi\right\|^2\cdot\left\|\nabla\theta\right\|^2.$$

Отсюда по лемме Гронуолла имеем

$$\max_t\left\|\nabla\theta\right\|^2+\left\|\Delta\theta\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le C<\infty. \quad (11)$$

Далее нужно напомнить, что, если умножить неравенство (9) на положительное число ε и повторить дальнейшие выкладки, то легко можно получить оценку:

$$\|\varepsilon\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} < \infty. \qquad (12)$$

Для задачи (1)-(2) нужно еще предположить, что имеет место краевое условие

$\int\limits_S \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} dS = 0$ (что как раз не противоречит физической постановке задачи).

Далее в интегральном тождестве определения 1 возьмем $\Phi = \Delta\psi^\varepsilon(x,t)$ и проводя соответствующие выкладки, получим неравенство:

$$\varepsilon\|\nabla\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\Delta\psi(T,x)\|^2 + \mu\|\nabla\Delta\psi\|^2_{L_2(Q_T)} \le$$

$$\le \int\limits_0^T \|\Delta\psi\|^2 dt + C_1\varepsilon + C_2$$

Конечно, если рассматривать это неравенство при $\forall\tau \le T$, то имеем

$$\varepsilon\int\limits_0^\tau \|\nabla\psi_t\|^2 dt + \|\Delta\psi(\tau,x)\|^2 + \mu\|\nabla\Delta\psi\|^2_{L_2(0,\tau,L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \int\limits_0^\tau \|\Delta\psi\|^2 dt + C_1\varepsilon + C_2 \qquad (13)$$

Отсюда повторяя аналогичные операции, как и при получении оценок (10), (12) легко получим оценки:

$$\varepsilon\|\nabla\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \max_t\|\Delta\psi(t,x)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\|\nabla\Delta\psi\|^2_{L_2(Q_T)} \le C \qquad (14)$$

$$\|\nabla\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} \le C < \infty \qquad (15)$$

(15) получается умножением (13) на $1/\varepsilon$ и повторением известных выкладок.

Дальнейшее доказательство теоремы опирается на метод Галеркина. Пусть $W_j$ – базис пространства $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega) \cap W^2_2(\Omega)$ ортонормированный в $L_2(\Omega)$ из задачи

$$\Delta W_j = \lambda_j W_j, \quad W_j\big|_S = \frac{\partial W_j}{\partial n}\bigg|_S = 0 \qquad (16)$$

и построим последовательность приближенных решений:

$$\psi^{N,\varepsilon} = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) W_j \qquad (17)$$

а функции $\theta^{\varepsilon,N}$ – находятся из уравнения:

$$\frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial t} + (\psi^\varepsilon_N)_y \frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial x} -$$

$$-(\psi^{N,\varepsilon})_x \frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial y} = \lambda\Delta\theta^{\varepsilon,N} \qquad (18)$$

Числа $\alpha_j(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\varepsilon(\psi^{\varepsilon,N})_{tt} + \varepsilon Q_m + (\Delta\psi^{\varepsilon,N})_t +$$

$$+\frac{\partial\psi^{\varepsilon,N}}{\partial y}\frac{\partial\omega^{\varepsilon,N}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{\varepsilon,N}}{\partial x}\frac{\partial\omega^{\varepsilon,N}}{\partial y} - \mu\Delta\omega^{\varepsilon,N} -$$

$$-\gamma(\theta^{\varepsilon,N})_y, W_j)_\Omega = 0, \ \omega^{\varepsilon,N} = \Delta\psi^{\varepsilon,N},$$

$$j = \overline{1..N}. \qquad (19)$$

Стандартным образом можно доказать существование решения задачи (17)-(19). Для этих решений уже известным способом можно получить следующие оценки:

$$\|\theta^{\varepsilon,N}\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \|\nabla\theta^{N,\varepsilon}\|^2_{L_\infty(0,T,L_2)} +$$

$$+\|\Delta\theta^{\varepsilon,N}\|^2_{L_2(Q_T)} \le C < \infty \qquad (20)$$

$$\|\varepsilon(\psi^{\varepsilon,N})_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \|(\nabla\psi^{N,\varepsilon})_t\|^2_{L_2(Q_T)} +$$

$$+\|\Delta\psi^{N,\varepsilon}\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \|\nabla\Delta\psi^{N,\varepsilon}\|^2_{L_2(Q_T)} \le C$$

Эти оценки позволяют выделить подпоследовательности, для которых:

$\theta^{\varepsilon,N} \to \theta^\varepsilon$ * слабо в $L_\infty(0,T,L_2(\Omega))$,

$\theta^{N,\varepsilon} \to \theta^\varepsilon$ * слабо в $L_\infty(0,T,W^1_2(\Omega))$,

$\theta^{N,\varepsilon} \to \theta^{\varepsilon}$ слабо в $L_2(0,T,W_2^2(\Omega))$,

$\varepsilon\psi_t^{N,\varepsilon} \to \varepsilon\psi_t^{\varepsilon}$ слабо в

$L_2(0,T,L_2(\Omega))$,

$\psi_t^{N,\varepsilon} \to \psi_t^{\varepsilon}$ слабо в $L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$,

$\psi^{N,\varepsilon} \to \psi^{\varepsilon}$ * слабо в

$L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega))$,

$\psi^{N,\varepsilon} \to \psi^{\varepsilon}$ сильно в $L_2(0,T,W_2^1(\Omega))$.

Эти соотношения при $N \to \infty$ в (6) позволяют показать, что предельные функций $\psi^{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}$ – являются обобщенным решением задачи (3)–(4).

Далее, так как оценки (20) не зависят от малого параметра $\varepsilon$, то имеет место следующие соотношения при $\varepsilon \to 0$:

$\theta^{\varepsilon} \to \theta$ * слабо в $L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega))$,

$\theta^{\varepsilon} \to \theta$ слабо в $L_2(0,T,W_2^2(\Omega))$,

$\varepsilon\psi_t^{\varepsilon} \to 0$ слабо в $L_2(0,T,L_2(\Omega))$,

$\psi_t^{\varepsilon} \to \psi_t$ слабо в $L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$,

$\psi^{\varepsilon} \to \psi$ * слабо в $L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega))$,

$\psi^{\varepsilon} \to \psi$ сильно в $L_2(0,T,W_4^1(\Omega))$,

Данные соотношения позволяют, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в соответствующих тождествах, показать, что предельные функций $\psi, \theta$ являются обобщенным решением (1)-(2).
Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Т.И.* Механика сплошной среды. В 2т. –М: Наука, 1973. –Т1. -536с.

2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. -М.: Наука, 1973. - 407с.

3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 318с.

**Резюме**

Бұл жұмыста ток функциясы мен құйын жылдамдығы айнымалылары арқылы берілген сығылмайтын тұтқыр сұйықтықтың температураны ескергендегі $\varepsilon$ - регуляризациясы зерттелді. Жалпылама шешімнің бар болуы мен жинақталуы дәлелденген. Бірқалыпты априорлық бағалар алынған.

**Summary**

In this work it is investigated $\varepsilon$ - approximation one model of a viscous incompressible liquid in variables of function of a current and a whirlwind of speeds in view of temperatures. Existence and convergence of the generalized decision of an auxiliary task is proved. Uniform aprioristic estimations are received.