УДК 550.385; 533.95

В.В. ЛЯХОВ

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ТЕПЛОВОЙ ПЛАЗМОЙ И МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Исследование структуры равновесных пограничных слоев между холодной и тепловой плазмой и магнитным полем имеет длинную историю и начинается с работ Чепмена и Ферраро [1]. Авторы естественным образом сталкиваются с эффектом поляризации пограничных слоев, возникающих в замагниченной плазме вследствие разных значений масс и, следовательно, ларморовских радиусов электронной и ионной компонент. Многие решения, например [2], получены в приближении квазинейтральности. Возникающее в таких приближенных решениях электрическое поле требует, конечно, дополнительного исследования и полного решения задачи. Другие решения получены в классе электронейтральных [3,4], что достигается наложением определенных связей на параметры задачи. Некоторые исследователи, например [5], постулируют интегральную нейтральность переходных слоев. И, наконец, в группе работ, например [6-7], делается вывод о том, что плазма переходных слоёв в общем случае поляризована.

Ниже будет показано, что электронейтральные решения справедливы только при некоторых определенных соотношениях между параметрами задачи.

При исследовании устойчивости границы плазма – магнитное поле, как правило, пренебрегают предварительным строгим исследованием равновесия этой границы. В качестве равновесного решения в учебнике [8], например, берется a priori максвелловская функция распределения с неоднородными значениями плотности и температуры. Рассматривается, в частности, случай, когда характерный размер неоднородности границы намного превышает ларморовские радиусы компонент плазмы. Но этим не может быть исчерпана общая проблема границы. В такой постановке остается за пределами рассмотрения проблема самосогласования электромагнитных полей, а значит степень адекватности предлагаемых моделей реальной границе и её устойчивости. Так, в классе самосогласованных решений плазма с максвелловским распределением по скоростям не может образовать равновесной границы с удерживающим её магнитным полем.

Постановка задачи

Пусть в нижнем полупространстве (см. рис. 1) сосредоточена плазма, а в верхнем полупространстве – удерживающее её магнитное поле. На границе этих областей в плоскости *xoy* образуется самосогласованный переходный слой.

Задача одномерна, все величины зависят от переменной *z*. Исследуемая среда описывается системой из кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + e_\alpha\left\{\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]\right\}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{P}_\alpha} = 0, \qquad (1)$$

и уравнений Максвелла с самосогласованным электромагнитным полем (внешние источники отсутствуют)

$$rot\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}, div\vec{B} = 0, \qquad (2)$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int \delta f_\alpha d\vec{P},$$

$$\vec{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \vec{v}\delta f_\alpha d\vec{P}.$$

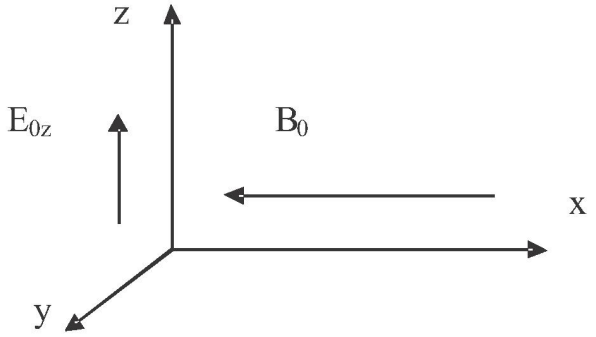

Рис. 1

Задача (1),(2) решается методом теории возмущений

$$f_\alpha(\vec{P},\vec{r},z,t) = f_{0\alpha}(\vec{P}) + \delta f_\alpha(\vec{P},\vec{r},z,t);$$
$$\vec{E}(\vec{r},z,t) = \vec{E}_0(z) + \delta\vec{E}(\vec{r},z,t); \qquad (3)$$
$$\vec{B}(\vec{r},z,t) = \vec{B}_0(z) + \delta\vec{B}(\vec{r},z,t).$$

Плазма считается слабонеравновесной $\delta f_\alpha(\vec{P},\vec{r},z,t) < f_{0\alpha}(\vec{P})$.

Вывод уравнений, описывающих электромагнитное поле погранслоя

Равновесная функции распределения конструируется как функция от интегралов движения $f_{0\alpha}(\vec{P}) = f_{0\alpha}(W,P_y,P_x)$, где полная энергия и обобщенные импульсы имеют вид:

$$W = \frac{1}{2}m_\alpha(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2) + e_\alpha\phi(z),$$
$$P_y = m_\alpha v_y + e_\alpha A_y(z), \qquad (4)$$
$$P_x = m_\alpha v_x.$$

Здесь $\phi(z), A_y(z)$ - электрический и магнитный потенциалы ($\vec{E}_0 = -grad\phi, \vec{B}_0 = rot\vec{A}$).

Выбор равновесной функции распределения в виде [3]

$$f_{0\alpha}(W,P_y) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi\theta_{\alpha z}}\right)^{\frac{3}{2}} n_{0\alpha}(1+a_\alpha)\exp\{-\frac{W_\alpha}{\theta_{\alpha z}} - \frac{a_\alpha P_{y\alpha}}{2m_\alpha\theta_{\alpha z}}\}, \qquad (5)$$

где степень анизотропии a_α определяется формулой

$$a_\alpha = (\frac{\theta_{\alpha z}}{\theta_{\alpha y}} - 1), \qquad (6)$$

а интегралы движения W_α и $P_{y\alpha}$ - формулами (4), позволяет получить уравнения для потенциалов самосогласованного электромагнитного поля:

$$\eta\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \exp(\frac{\psi}{\beta} - \frac{\alpha_e}{1+\alpha_e}\frac{a^2}{2\beta\mu}) - \exp(-\psi - \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}\frac{a^2}{2}), \qquad (7)$$

$$\frac{d^2a}{d\xi^2} = \frac{\alpha_e}{1+\alpha_e}\frac{a}{\mu}\exp(\frac{\psi}{\beta} - \frac{\alpha_e}{1+\alpha_e}\frac{a^2}{2\beta\mu}) +$$
$$+\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}a\exp(-\psi - \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}\frac{a^2}{2}). \qquad (8)$$

Здесь введены следующие безразмерные величины:

$$\mu = \frac{m}{M}, \beta = \frac{\theta_{xe}}{\theta_{xi}}, \eta = \frac{\theta_{xi}}{Mc^2}, \psi = \frac{e}{\theta_{xi}}\phi,$$
$$a = \frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{\theta_{xi}M}}A_y, \xi^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{Mc^2}x^2. \qquad (9)$$

Функция распределения (5) введена в работе Никольсона [3] при построении равновесного решения для слоя тепловой плазмы, разделяющей области с одинаково направленными магнитными полями. Никольсон рассматривает наиболее простой случай электронейтральных решений. Такие решения можно получить только, если наложить на параметры задачи следующую связь:

$$\frac{1}{\theta_{ez}m_e}\frac{\alpha_e}{1+\alpha_e} = \frac{1}{\theta_{iz}m_i}\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}. \qquad (10)$$

В этом случае уравнение для электрического потенциала (7) дает тривиальное решение $\psi(\xi) = 0$. В качестве граничного условия к оставшемуся уравнению для магнитного потенциала (8) Никольсон выбирает:

$$a(\xi = 0) = 0, \qquad (11)$$

оставляя вторую константу $C = \left(\frac{da}{d\xi}(\xi = 0)\right)^2$, представляющую собой квадрат магнитного поля, произвольной.

Оказывается, что с помощью функции распределения (5) можно построить решение для равновесной границы между тепловой плазмой и магнитным полем. В этом случае в качестве граничных для уравнений (7), (8) следует поставить следующие условия:

$$\psi(-\infty) = 0, a(-\infty) = 0, E(-\infty) =$$
$$-\psi'(-\infty) = 0, B(-\infty) = a'(-\infty) = 0. \qquad (12)$$

Полученная система уравнений Максвелла (7), (8), (12) описывает самосогласованное электромагнитное поле равновесного пограничного слоя между плазмой и магнитным полем. Мы отказываемся от условия электронейтральности (10), ограничивающего область применимости решения. Всюду в области переходного слоя существует отличное от нуля равновесное электрическое поле (8).

Здесь введены следующие безразмерные величины:

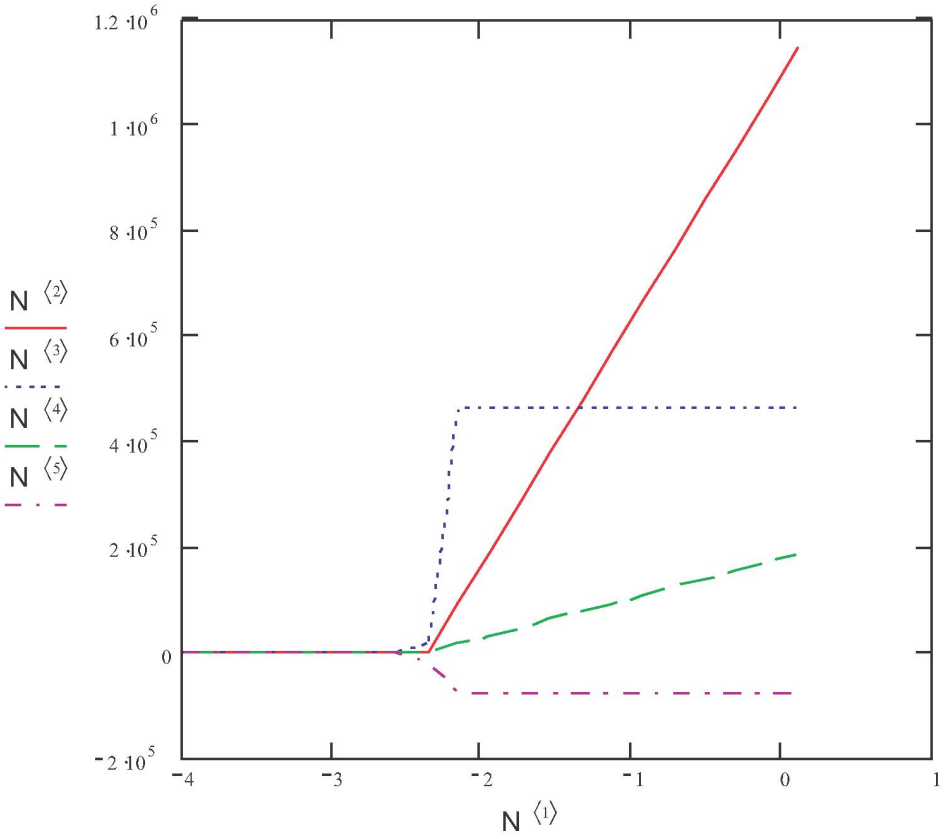

Рис. 2. Профили характеристик пограничного слоя

$$\mu = \frac{m}{M}, \beta = \frac{\theta_{xe}}{\theta_{xi}}, \eta = \frac{\theta_{xi}}{Mc^2}, \psi = \frac{e}{\theta_{xi}}\phi,$$

$$a = \frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{\theta_{xi}M}}A_y, \xi^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{Mc^2}x^2. \qquad (9)$$

Функция распределения (5) введена в работе Никольсона [3] при построении равновесного решения для слоя тепловой плазмы, разделяющей области с одинаково направленными магнитными полями. Никольсон рассматривает наиболее простой случай электронейтральных решений. Такие решения можно получить только, если наложить на параметры задачи следующую связь:

$$\frac{1}{\theta_{ez}m_e}\frac{\alpha_e}{1+\alpha_e} = \frac{1}{\theta_{iz}m_i}\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}. \qquad (10)$$

В этом случае уравнение для электрического потенциала (7) дает тривиальное решение $\psi(\xi) = 0$. В качестве граничного условия к оставшемуся уравнению для магнитного потенциала (8) Никольсон выбирает:

$$a(\xi = 0) = 0, \qquad (11)$$

оставляя вторую константу $C = \left(\frac{da}{d\xi}(\xi = 0)\right)^2$, представляющую собой квадрат магнитного поля, произвольной.

Оказывается, что с помощью функции распределения (5) можно построить решение для равновесной границы между тепловой плазмой и магнитным полем. В этом случае в качестве граничных для уравнений (7), (8) следует поставить следующие условия:

$$\psi(-\infty) = 0, a(-\infty) = 0, E(-\infty) =$$
$$= -\psi'(-\infty) = 0, B(-\infty) = a'(-\infty) = 0. \qquad (12)$$

Полученная система уравнений Максвелла (7), (8), (12) описывает самосогласованное электромагнитное поле равновесного пограничного слоя между плазмой и магнитным полем. Мы отказываемся от условия электронейтральности (10), ограничивающего область применимости

решения. Всюду в области переходного слоя существует отличное от нуля равновесное электрическое поле.

Методика численного решения задачи

Численное решение непосредственно задачи (7), (8), (12) даст тривиальный нуль. Необходимо прежде найти асимптотику уравнений (7), (8) в области $a \to 0, \psi \to 0$. Оставляя малые члены, порядка ψ и a^2, можно найти асимптотику системы:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{1+\beta}{\beta\eta}\psi + \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i} - \frac{1}{\beta\mu}\frac{\alpha_e}{1+\alpha_e}\right)a^2,$$

$$\frac{d^2a}{d\xi^2} = \left(\frac{1}{\mu}\frac{a_e}{1+\alpha_e} + \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}\right)a. \qquad (13)$$

Решение этой системы есть:

$$a = c_2\exp(\sqrt{b}\xi), B = a' = c_2\sqrt{b}\exp(\sqrt{b}\xi),$$

$$\psi = \frac{c_2 d}{2\sqrt{s}(\sqrt{b}-\sqrt{s})}\exp(\sqrt{b}\xi) + c_3\exp(\sqrt{s}\xi), \qquad (14)$$

$$E = -\psi' = -\frac{c_2 d\sqrt{b}}{2\sqrt{s}(\sqrt{b}-\sqrt{s})}\exp(\sqrt{b}\xi) - c_3\sqrt{s}\exp(\sqrt{s}\xi).$$

При численном счете надо стартовать с асимптотического решения (14) в некоторой точке ξ. Здесь введены обозначения:

$$s = \frac{1+\beta}{\beta\eta}, d = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i} - \frac{1}{\beta\mu}\frac{\alpha_e}{1+\alpha_e}\right),$$

$$b = \left(\frac{1}{\mu}\frac{a_e}{1+\alpha_e} + \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}\right) \qquad (15)$$

Коэффициенты c_2 и c_3 могут быть произвольными, в частности можно положить

$$c_2 = c_3 = 1.$$

Результаты решения

Численное решение задачи (7), (8), (12) с учетом асимптотики (14) получено в пакете MATHCAD и представлено на рис. 2.

Расчеты проведены при значениях параметров $s = 0.5$, $\eta = 0.5$, $\beta = 1$. Кривая 1 представляет собой профиль магнитного потенциала, кривая 2 – профиль магнитного поля, кривая 3 – профиль электрического потенциала, кривая 4 – профиль электрического поля. Кривые магнитного потенциала и магнитного поля являются типичными для пограничного слоя между плазмой и магнитным полем. Но при этом оказывается, что в общем случае произвольных параметров плазма погранслоя поляризована, см. профиль электрического поля (кривая 4).

Заключение

Электронейтральные решения представляют собой узкий класс решений и существуют только при определенных соотношениях между параметрами задачи, см. формулу (10). Для получения строгого решения задачи о переходном слое между тепловой плазмой и магнитным полем необходимо прибегнуть к численному счету системы (7), (8), (12). Оказывается, что в общем случае плазма стационарного пограничного слоя поляризована, и это электрическое поляризационное поле необходимо учитывать при исследовании неустойчивости погранслоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chapman S., Ferraro V.C.A.* A New Theory of Magnetic Storms: Part I – The Initial Phase// Terr. Magn. Atmos. Elect. V. 36. № 1. P. 77-97. 1931.

2. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Кинетическое рассмотрение некоторых равновесных плазменных конфигураций// ЖЭТФ. Т. 40. №5. С. 1316-1324. 1961.

3. *Nicholson R.B.* Solution of the Vlasov Equations for a Plasma in an Externally Uniform Magnetic Field // Phys. Fluids. V. 6. № 11. P. 1581-1586. 1963.

4. *Harris E.G.* On a Plasma Sheath Separating Regions of Oppositely Directed Magnetic Field // Nuovo Cim. V. XXIII. № 1. P. 115 – 121.1962.

5. *Сигов Ю.С.* Структура пограничного слоя между разреженной плазмой и магнитным полем// Ж. прикл. механ. и техн. физ. № 2. С. 15-22. 1965.

6. *Sestero A.* Charge Separation Effects in the Ferraro-Rosenbluth Cold Plasma Sheath Model// Phys. Fluids. V. 8. № 4. P. 739-744. 1965.

7. *Ляхов В.В., Шабанский В.П.* Релятивистская модель пограничного слоя между магнитным полем и отражающимся от него потоком холодной плазмы// Деп. в ВИНИТИ. №5588-85 Деп.1985.

8. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа. 424с. 1988.

Резюме

Власовтың стационарлық теңдеуін шешу негізінде жылу плазмасы мен магниттік өріс арасындағы тепе-теңдіктегі шекаралық қабаттың кинетикалық моделі құрылған. Қазір пайдаланылатын электронейтралдық шешімдердің жіңішке кластық шешім болып табылатындығы және олардың есептер параметрлері арасында белгілі бір қатынастар кезінде орын алатындығы көрсетілген. Жалпы жағдайда стационарлық шекаралық қабат плазмасы поляризацияланады екен.

Summary

The kinetic model of equilibrium boundary layer between thermal plasma and magnetic field is built on the basis of solution of Vlasov's stationary equation. It is shown that electroneutral solutions used nowadays represent the narrow class of solutions and exist only at specific relations between parameters the problem. It turns out that generally plasma of a stationary boundary layer is polarized.

Департамент «Институт ионосферы»,
г. Алматы

Поступила 21.07.2009 г.