УДК 539.3

Т.Б. МАДАЛИЕВ

ОДИН НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ БЕСКОНЕЧНО-ПРОТЯЖЕННЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

(Институт механики и машиноведения им. академика У.А.Джолдасбекова, г.Алматы)

В работе предлагается один новый метод, основанный на применении сплайн-функций и позволяющий исходную краевую задачу на первом этапе свести к нахождению решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (СЛОДУ) нормального вида ***с фиксированным порядком ее матрицы****. Это позволяет независимо от количества точек разбиения один раз найти общее решение построенной СЛОДУ. Затем, используя полученные параметры в виде произвольных констант найденного общего решения СЛОДУ, можно построить для их вычисления, учитывая граничные условия исходной краевой задачи, систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с главной матрицей, имеющей благоприятную блочно-диагональную структуру. Предложенная схема численно-аналитического решения удобна для экономной, быстрой и эффективной реализации средствами современной компьютерной математики, в частности, системой компьютерной математики* ***MATLAB****.*

При решении большинства краевых задач математической физики численно-аналитическими методами в конечном счете все сводится к нахождению решения некоторой системы линейных алгебраических уравнений. Эффективность решения таких СЛАУ, как известно, зависит от структуры главной матрицы системы. Поэтому эффективность численно-аналитического решения той или иной краевой задачи математической физики напрямую зависит от того, насколько матрица соответствующей СЛАУ имеет благоприятную структуру.

Рассмотрим бесконечно-протяженный упругий изотропный цилиндр (Рис.1.), взятый без ограничения общности с сечением в виде эллипса и упругими постоянными Ламе λ, μ.

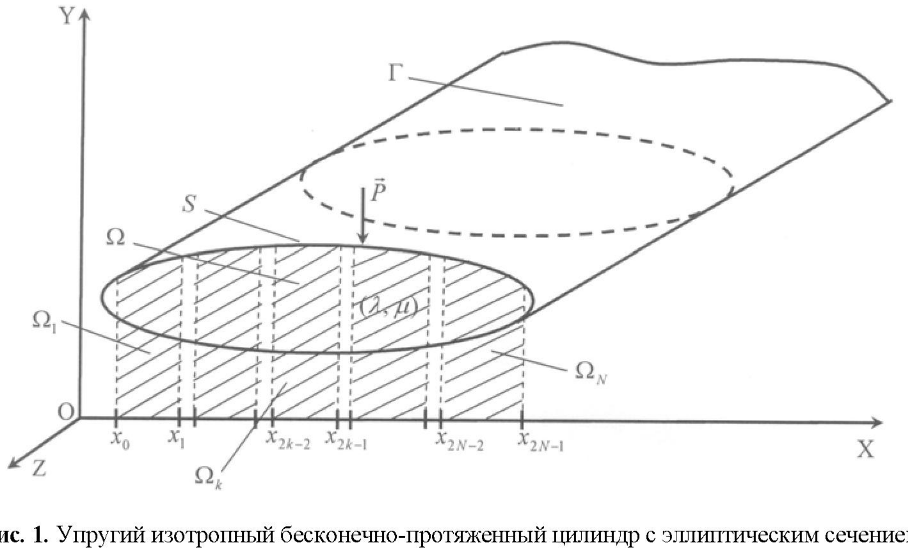

Рис. 1. Упругий изотропный бесконечно-протяженный цилиндр с эллиптическим сечением

Будем считать, что на поверхности цилиндра Γ заданы напряжения $\vec{\mathrm{P}}$, не зависящие от переменной z, а массовые силы отсутствуют.

В этом случае говорят о *плоской деформации*, так как всем уравнениям теории упругости можно удовлетворить, полагая $u_3 = const$ и считая u_1, u_2 функциями только двух переменных x, y.

Возьмем произвольное сечение Ω нормальное координатной оси Oz и в полученном сечении разобьём рассматриваемую среду на N вертикальных полос линиями $x = x_i$, $i = 0,...,2N-1$ (на рис.1. – пунктирные линии).

Рассмотрим теперь k-ю полосу Ω_K, ограниченную линиями $x = x_{2k-2}$ и $x = x_{2k-1}$, расположенную в плоскости OXY. Сделаем так, чтобы соседние основные полосы $\{(x,y): x \in [x_{2k-2}, x_{2k-1}], k = 1,...,N\}$ были разделены более узкими полосами $\{(x,y): x \in [x_{2m-1}, x_{2m}], m = 1,...,N-1\}$, как это показано на рис.1. Поскольку все полосы равнозначны, то достаточно взять для дальнейших рассуждений произвольную полосу, в данном случае k-ю.

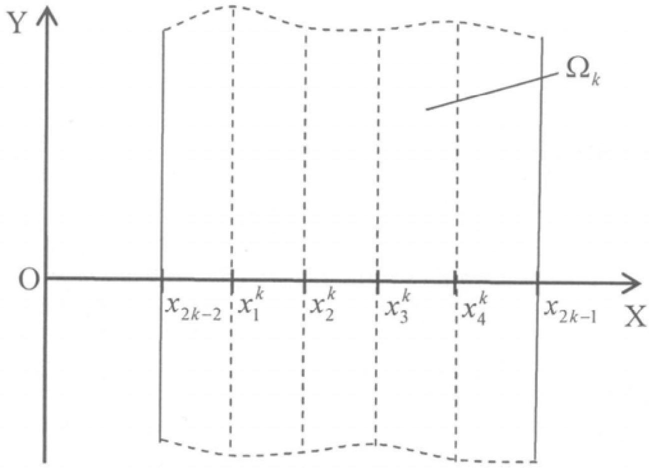

Рис. 2. Ω_k-ая полоса

Разобъем точками $x = x_1^k$, $x = x_2^k$, $x = x_3^k$, $x = x_4^k$ k-ю полосу Ω_K на 5 полос разной ширины, хотя можно для удобства взять и одинаковой ширины.

Постановка задачи для области Ω

В плоском случае (плоское деформированное состояние) постановка задачи для рассматриваемой однородной изотропной среды будет следующей [1]:

1. Найти вектор перемещения $\vec{U}\ (x,y) = (u_1, u_2)$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad (1)$$

в плоской области Ω.

2. Граничное условие на S запишется так:

$$2\mu\,\frac{\partial u_1}{\partial x} n_1 + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) n_2 + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) n_1 = p_1,$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) n_1 + 2\mu\,\frac{\partial u_2}{\partial y} n_2 + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) n_2 = p_2, \ (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$f_{2k-2}^{\alpha}(y),\ f_{2k-1}^{\alpha}(y),\ g_{2k-2}^{\alpha}(y),\ g_{2k-1}^{\alpha}(y),\ q_{2k-2}^{\alpha}(y),\ q_{2k-1}^{\alpha}(y),\ \alpha = 1,2,\ k = 1,...,N, \qquad (3)$$

здесь в (3) – неизвестные функции, подлежащие определению из условий рассматриваемой задачи;

$$\vec{\varphi}(t) \equiv \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), h_k^*\varphi_3(t), h_k^*\varphi_4(t), \frac{1}{2}(h_k^*)^2\varphi_5(t), \frac{1}{2}(h_k^*)^2\varphi_6(t)\}; \quad (k=1,\ldots,N); \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi_1(t)=(1-t)^3(1+3t+6t^2), \quad \varphi_2(t)=t^3(10-15t+6t^2), \varphi_3(t)=t(1-t)^3(1+3t),\\ \varphi_4(t)=-t^3(1-t)(4-3t), \quad \varphi_5(t)=t^2(1-t)^3, \varphi_6(t)=t^3(1-t)^2,\end{gathered} \tag{5}$$

$$h_k^* = x_{2k-1}-x_{2k-2}, \quad t=(x-x_{2k-2})/h_k^*. \tag{6}$$

Выражения (5)-(6) приводятся также в [2].

Теперь введем следующую вектор-функцию:

$$\vec{F}_\alpha^k(y)=\{f_{2k-2}^\alpha(y), f_{2k-1}^\alpha(y), g_{2k-2}^\alpha(y), g_{2k-1}^\alpha(y), q_{2k-2}^\alpha(y), q_{2k-1}^\alpha(y)\}, \tag{7}$$

$$(\alpha=1,2, \quad k=1,\ldots,N)$$

На каждом промежутке $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$, $k=1,\ldots,N$, решение задачи (1)-(2) для указанной области ищем в виде интерполяционного эрмитова сплайна 5-ой степени, записанного для удобства в форме скалярного произведения векторов [3]:

$$u_\alpha^k(x,y)=(\vec{\varphi}, \vec{F}_\alpha^k), \quad \alpha=1,2, \quad k=1,\ldots,N. \tag{8}$$

С помощью представления решения (8) запишем каждое из уравнений (1) на произвольном промежутке $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$, $k=1,\ldots,N,$, через функции $\vec{F}_\alpha^k(y)$:

$$\begin{gathered}\mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1^k)+(\vec{\varphi}, \ddot{\vec{F}}_1^k)\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1^k)+(\dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{F}}_2^k)\right\}=0,\\ \mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_2^k)+(\vec{\varphi}, \ddot{\vec{F}}_2^k)\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{F}}_1^k)+(\vec{\varphi}, \ddot{\vec{F}}_2^k)\right\}=0,\\ (k=1,\ldots,N)\end{gathered} \tag{9}$$

При каждом фиксированном k на промежутке $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$ имеем два уравнения для определения 12 неизвестных функций $f_{2k-2}^\alpha(y)$, $f_{2k-1}^\alpha(y)$, $g_{2k-2}^\alpha(y)$, $g_{2k-1}^\alpha(y)$, $q_{2k-2}^\alpha(y)$, $q_{2k-1}^\alpha(y)$. Для того, чтобы иметь полную систему уравнений для определения этих функций, добавим к концевым точкам отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$еще 4 точки $x=x_1^k$, $x=x_2^k$, $x=x_3^k$, $x=x_4^k$, как показано на рис.2. Тогда, записывая уравнения (9) для каждой из этих точек, включая концевые точки отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$, получим полную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций.

Запишем сначала уравнения (9) в концевых точках отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$, т.е. согласно обозначениям (6) для $t=0$ и $t=1$:

$$\begin{gathered}\mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_1^k(y))+(\vec{\varphi}(0), \ddot{\vec{F}}_1^k(y))\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_1^k(y))+(\dot{\vec{\varphi}}(0), \dot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}=0,\\ \mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_2^k(y))+(\vec{\varphi}(0), \ddot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\dot{\vec{\varphi}}(0), \dot{\vec{F}}_1^k(y))+(\vec{\varphi}(0), \ddot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}=0,\\ \mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_1^k(y))+(\vec{\varphi}(1), \ddot{\vec{F}}_1^k(y))\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_1^k(y))+(\dot{\vec{\varphi}}(1), \dot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}=0,\\ \mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_2^k(y))+(\vec{\varphi}(1), \ddot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\dot{\vec{\varphi}}(1), \dot{\vec{F}}_1^k(y))+(\vec{\varphi}(1), \ddot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}=0,\\ (k=1,\ldots,N)\end{gathered} \tag{10}$$

Для внутренних точек $x=x_1^k$, $x=x_2^k$, $x=x_3^k$, $x=x_4^k$ отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$ будем иметь:

$$t_1^k=\frac{x_1^k-x_{2k-2}}{x_{2k-1}-x_{2k-2}}, \quad t_2^k=\frac{x_2^k-x_{2k-2}}{x_{2k-1}-x_{2k-2}}, \quad t_3^k=\frac{x_3^k-x_{2k-2}}{x_{2k-1}-x_{2k-2}}, \quad t_4^k=\frac{x_4^k-x_{2k-2}}{x_{2k-1}-x_{2k-2}}, \tag{11}$$

$$(k=1,\ldots,N).$$

Следует заметить, что точки $x=x_1^k$, $x=x_2^k$, $x=x_3^k$, $x=x_4^k$ внутри отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$ можно выбирать совершенно произвольно и на каждом из таких отрезков по-разному. Однако для удобства выберем указанные точки таким образом, чтобы, например:

для любых $\qquad k=1,\ldots,N\,;\ t_1^k=0{,}2;\ \ t_2^k=0{,}4;\ \ t_3^k=0{,}6;\ \ t_4^k=0{,}8;$ (12)

тогда уравнения (9) для выбранных точек запишется в виде:

$$\mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_1^k(y))+(\vec{\varphi}(t_i^k),\ddot{\vec{F}}_1^k(y))\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_1^k(y))+(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\dot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}=0,$$
$$\mu\left\{(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_2^k(y))+(\vec{\varphi}(t_i^k),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}+(\lambda+\mu)\left\{(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\dot{\vec{F}}_1^k(y))+(\vec{\varphi}(t_i^k),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))\right\}=0, \tag{13}$$
$$(i=1,\ldots,4;\ \ k=1,\ldots,N\,).$$

Таким образом, системы (10) и (13) при каждом фиксированном k составляют собой полную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для определения 12 неизвестных функций $f_{2k-2}^{\alpha}(y)$, $f_{2k-1}^{\alpha}(y)$, $g_{2k-2}^{\alpha}(y)$, $g_{2k-1}^{\alpha}(y)$, $q_{2k-2}^{\alpha}(y)$, $q_{2k-1}^{\alpha}(y)$, $\alpha=1,2$, $k=1,\ldots,N$.

Следует отметить, что всюду здесь под обозначениями ($\dot{}$) и ($\ddot{}$) понимается производная первого и второго порядка соответственно по x для вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ и по y для вектор-функций $\vec{F}_{\alpha}^k(y)$.

Отметим, что если рассматривать полосы одинаковой ширины, то можно положить в формуле (6) $h_k^*=h$.

Перепишем уравнения (10), (13) в виде:

$$\mu(\vec{\varphi}(0),\ddot{\vec{F}}_1^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(0),\dot{\vec{F}}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_1^k(y))=0,$$
$$\mu(\ddot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_2^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(0),\dot{\vec{F}}_1^k(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(0)),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))=0,$$
$$\mu(\vec{\varphi}(1),\ddot{\vec{F}}_1^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(1),\dot{\vec{F}}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_1^k(y))=0,$$
$$\mu(\ddot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_2^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(1),\dot{\vec{F}}_1^k(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(1),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))=0, \tag{14}$$
$$(k=1,\ldots,N)$$

$$\mu(\vec{\varphi}(t_i^k),\ddot{\vec{F}}_1^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\dot{\vec{F}}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_1^k(y))=0,$$
$$\mu(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_2^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\dot{\vec{F}}_1^k(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(t_i^k),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))=0, \tag{15}$$
$$(i=1,\ldots,4;\ \ k=1,\ldots,N\,).$$

Чтобы привести систему (16)-(17) к нормальному виду [4,5], введем векторное обозначение:

$$\begin{gathered}\vec{G}_{\alpha}^k(y)=\{w_{2k-2}^{\alpha}(y),w_{2k-1}^{\alpha}(y),v_{2k-2}^{\alpha}(y),v_{2k-1}^{\alpha}(y),s_{2k-2}^{\alpha}(y),s_{2k-1}^{\alpha}(y)\}\equiv\\ \equiv\dot{\vec{F}}_{\alpha}^k(y)=\{\dot{f}_{2k-2}^{\alpha}(y),\dot{f}_{2k-1}^{\alpha}(y),\dot{g}_{2k-2}^{\alpha}(y),\dot{g}_{2k-1}^{\alpha}(y),\dot{q}_{2k-2}^{\alpha}(y),\dot{q}_{2k-1}^{\alpha}(y)\}\end{gathered}, \tag{16}$$
$$(\alpha=1,2,\ \ k=1,\ldots,N\,)$$

Тогда уравнения (14)-(15) перепишутся в виде:

$$\mu(\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{G}}_1^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{G}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_1^k(y))=0,$$
$$\mu(\ddot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_2^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{G}_1^k(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(0),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))=0,$$
$$\mu(\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{G}}_1^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{G}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_1^k(y))=0,$$
$$\mu(\vec{\varphi}(1),\vec{F}_2^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{G}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(1),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))=0, \tag{17}$$
$$(k=1,\ldots,N)$$

$$\mu(\vec{\varphi}(t_i^k),\dot{\vec{G}}_1^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{G}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_1^k(y))=0,$$
$$\mu(\vec{\varphi}(t_i^k),\vec{F}_2^k(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{G}_2^k(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(t_i^k),\ddot{\vec{F}}_2^k(y))=0, \tag{18}$$
$$(i=1,\ldots,4;\ \ k=1,\ldots,N\,).$$

Для полноты системы к уравнениям (17)-(18) необходимо добавить уравнения (16). Запишем их в векторном виде так:

$\dot{\vec{F}}_{\alpha}^{k}(y)=\vec{G}_{\alpha}^{k}(y),$ (19)

$(\alpha=1{,}2,\ k=1,...,N)$

Поскольку полученная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (17)-(19) при любых фиксированных k однотипны, то для нахождения решения, чтобы избежать излишней <u>заиндексированности</u> введенных обозначений, введем новые обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\vec{F}_1(y)=\{f_1(y), f_2(y), f_3(y), f_4(y), f_5(y), f_6(y)\}\equiv\\
&\equiv \vec{F}_1^k(y)=\{f_{2k-2}^1(y), f_{2k-1}^1(y), g_{2k-2}^1(y), g_{2k-1}^1(y), q_{2k-2}^1(y), q_{2k-1}^1(y)\},\\
&\vec{F}_2(y)=\{f_7(y), f_8(y), f_9(y), f_{10}(y), f_{11}(y), f_{12}(y)\}\equiv\\
&\equiv \vec{F}_2^k(y)=\{f_{2k-2}^2(y), f_{2k-1}^2(y), g_{2k-2}^2(y), g_{2k-1}^2(y), q_{2k-2}^2(y), q_{2k-1}^2(y)\},\\
&\vec{G}_1(y)=\{f_{13}(y), f_{14}(y), f_{15}(y), f_{16}(y), f_{17}(y), f_{18}(y)\}\equiv\\
&\equiv \vec{G}_1^k(y)=\{w_{2k-2}^1(y), w_{2k-1}^1(y), v_{2k-2}^1(y), v_{2k-1}^1(y), s_{2k-2}^1(y), s_{2k-1}^1(y)\}\equiv\\
&\equiv \dot{\vec{F}}_1^k(y)=\{\dot{f}_{2k-2}^1(y), \dot{f}_{2k-1}^1(y), \dot{g}_{2k-2}^1(y), \dot{g}_{2k-1}^1(y), \dot{q}_{2k-2}^1(y), \dot{q}_{2k-1}^1(y)\},\\
&\vec{G}_2(y)=\{f_{19}(y), f_{20}(y), f_{21}(y), f_{22}(y), f_{23}(y), f_{24}(y)\}\equiv\\
&\equiv \vec{G}_2^k(y)=\{w_{2k-2}^2(y), w_{2k-1}^2(y), v_{2k-2}^2(y), v_{2k-1}^2(y), s_{2k-2}^2(y), s_{2k-1}^2(y)\}\equiv\\
&\equiv \dot{\vec{F}}_2^k(y)=\{\dot{f}_{2k-2}^2(y), \dot{f}_{2k-1}^2(y), \dot{g}_{2k-2}^2(y), \dot{g}_{2k-1}^2(y), \dot{q}_{2k-2}^2(y), \dot{q}_{2k-1}^2(y)\}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Теперь систему (17)-(19) запишем в новых обозначениях:
уравнения (20) запишутся

$$
\begin{aligned}
&\dot{\vec{F}}_1(y)=\vec{G}_1(y),\\
&\dot{\vec{F}}_2(y)=\vec{G}_2(y),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

уравнения (17) запишутся

$$
\begin{aligned}
&\mu(\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{G}}_1(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{G}_2(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_1(y))=0,\\
&\mu(\ddot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_2(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{G}_1(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{G}}_2(y))=0,\\
&\mu(\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{G}}_1(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{G}_2(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_1(y))=0,\\
&\mu(\ddot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_2(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{G}_1(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{G}}_2(y))=0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

уравнения (18) запишутся

$$
\begin{aligned}
&\mu(\vec{\varphi}(t_i^k),\dot{\vec{G}}_1(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{G}_2(y))+(\lambda+2\mu)(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_1(y))=0,\\
&\mu(\ddot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{F}_2(y))+(\lambda+\mu)(\dot{\vec{\varphi}}(t_i^k),\vec{G}_1(y))+(\lambda+2\mu)(\vec{\varphi}(t_i^k),\dot{\vec{G}}_2(y))=0,\\
&(i=1,...,4;\ k=1,...,N).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Уравнения (23) можно расписать для каждой из точек $t=t_1^k=0{,}2;$ $t=t_2^k=0{,}4;$ $t=t_3^k=0{,}6;$ $t=t_4^k=0{,}8.$

С учетом введенных обозначений (20), полученную СЛОДУ (21)-(23) с 24-мя неизвестными можно расписать для каждой k -ой полосы в развернутом виде относительно неизвестных функций f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6,

f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}. Ради экономии места мы не будем здесь расписывать систему (21)-(23) относительно искомых функций

f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12},

f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}.

Система уравнений (21)-(23) составляет полную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно введенных неизвестных функций.

Далее систему уравнений (21)-(23) необходимо привести к нормальному виду [5]. Группа уравнений (21) уже записана в нормальном виде. Следовательно, к нормальному виду нужно привести группу уравнений (22)-(23). Для этого достаточно, формально рассматривая группу уравнений (22)-(23) как простую систему линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами, разрешить указанную систему уравнений (22)-(23) относительно первых производных $\dot{f}_1$, $\dot{f}_2$, $\dot{f}_3$, $\dot{f}_4$, $\dot{f}_5$, $\dot{f}_6$, $\dot{f}_7$, $\dot{f}_8$, $\dot{f}_9$, $\dot{f}_{10}$, $\dot{f}_{11}$, $\dot{f}_{12}$. Это очень легко сделать средствами современной компьютерной математики, в частности, системой компьютерной математики MATLAB.

В конечном счете, можно получить СЛОДУ, приведенную к следующему нормальному виду:

$$\frac{d\vec{F}}{dy} = A\vec{F}, \tag{24}$$

где A – матрица системы размерности 24×24, компоненты которой вычисляются, исходя из выбранных точек и выше приведенных формул,

$$\vec{F}(y) = \vec{U}^k(y) = \{\vec{F}_1(y), \vec{F}_2(y), \vec{G}_1(y), \vec{G}_2(y)\} = \{f_1(y), f_2(y), f_3(y), ..., f_{24}(y)\}. \tag{25}$$

Схема численно-аналитического решения задачи

Далее, определив с помощью **системы компьютерной математики (СКМ) MATLAB** характеристические значения и собственные вектора матрицы A СЛОДУ (24), можно построить общее решение системы (21)-(23), содержащее произвольные постоянные C_n^k, $k, n = 1,...,24$.

Общее решение СЛОДУ (24), а следовательно (21)-(23), для k -ой полосы (рис.1) запишется так [4]:

$$\vec{F}(y) = \vec{U}^k(y) = \{f_1(y), f_2(y),...., f_{24}(y)\} = \sum_n^{24} C_n^k e^{d_n y} \vec{V}_n, n = 1,...,24, \tag{26}$$

где C_n^k – скалярные величины ($k = 1,...,N$); d_n – характеристические значения матрицы A; $\vec{V}_n$ – собственные вектора матрицы A; N – количество выбранных выше полос.

Следует подчеркнуть, что последовательность констант $C_1^k, C_1^k, ..., C_{24}^k$ $(k = 1,...,N)$ представляют собой разные группы произвольных постоянных общего решения СЛОДУ (21)-(23), зависящих только от номера полосы k.

Граничные условия на S

Используя обозначения (20), запишем для каждого отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$, $(k = 1,...,N)$ вектор напряжения, действующий на произвольной площадке с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$:

$$\begin{gathered}
2\mu\ (\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1^k)n_1 + \mu\ \left\{(\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_1^k) + (\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_2^k)\right\}n_2 + \lambda\ \left\{(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1^k) + (\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_2^k)\right\}n_1 = p_1, \\
\mu\ \left\{(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_2^k) + (\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_1^k)\right\}n_1 + 2\mu\ (\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_2^k)n_2 + \lambda\ \left\{(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1^k) + (\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_2^k)\right\}n_2 = p_2, \\
(k = 1,...,N)
\end{gathered} \tag{27}$$

или, в силу введенных выше обозначений (20), (21), запишем (27) в виде

$$\begin{gathered}
2\mu\ (\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1)n_1 + \mu\ \left\{(\vec{\varphi}, \vec{G}_1) + (\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_2)\right\}n_2 + \lambda\ \left\{(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1) + (\vec{\varphi}, \vec{G}_2)\right\}n_1 = p_1, \\
\mu\ \left\{(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_2) + (\vec{\varphi}, \vec{G}_1)\right\}n_1 + 2\mu\ (\vec{\varphi}, \vec{G}_2)n_2 + \lambda\ \left\{(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_1) + (\vec{\varphi}, \vec{G}_2)\right\}n_2 = p_2, \\
(k = 1,...,N)
\end{gathered} \tag{28}$$

Далее, учитывая введенные обозначения (20), (21) и подставляя общее решение СЛОДУ (26) в уравнения граничных условий (27) на контуре S, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с постоянными коэффициентами относительно произвольных констант.

Отметим, чтобы получить связанную систему уравнений относительно групп констант $C_1^k, C_1^k, \ldots, C_{24}^k$ $(k = 1,\ldots,N)$***, необходимо взять в уравнениях (27) для граничных условий задачи хотя бы по одной точке*** $(x^m, y^m) \in S$ ***на контуре*** S***, абсцисса которой принадлежит узенькой полоске*** $\{(x,y): x \in [x_{2m-1}, x_{2m}], m = 1,\ldots,N\text{ - }1\}$.

Остальные точки на контуре S ***берутся, в общем случае, произвольным образом с абсциссами, лежащими на отрезках*** $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$, $(k = 1,\ldots,N)$***, при этом общее количество выбираемых точек должно быть равно*** $12N$.

В итоге получим $24N$ уравнений для определения $24N$ неизвестных скалярных констант $C_1^k, C_1^k, \ldots, C_{24}^k$ $(k = 1,\ldots,N)$. Матрица полученной СЛАУ будет размерности $24N \times 24N$. Количество ненулевых элементов этой матрицы не будет превышать $48 \times 24N$, и все они будут располагаться вдоль главной диагонали, придавая полученной матрице благоприятную для вычислений блочно-диагональную структуру.

Таким образом, вычислив из граничных условий на контуре произвольные константы $C_1^k, C_1^k, \ldots, C_{24}^k$ $(k = 1,\ldots,N)$, найдем вектор $\vec{U}(y) = \{f_1(y), f_2(y), \ldots, f_{24}(y)\}$ согласно (26). Зная компоненты вектора $\vec{U}(y) = \{f_1(y), f_2(y), \ldots, f_{24}(y)\}$, согласно введенным выше обозначениям (20), мы можем построить решение исходной задачи в виде (8).

В данной статье автором изложена новая схема численно-аналитического решения применительно к конкретной задаче плоской теории упругости, чтобы раскрыть суть предлагаемого метода решения. Однако, совершенно очевидно, что предложенный новый метод численно-аналитического решения применим не только к задачам механики деформируемого твердого тела, но и к любым краевым задачам математической физики. Более того, предложенным методом можно решать и задачи в трехмерной постановке при соответствующем его видоизменении и усложнении.

ЛИТЕРАТУРА

1 Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. 272с.
2 Завьялов Ю.С, Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 353с.
3 Мадалиев Т.Б. Сплайн-функции в решении задачи о плоской деформации двухслойной однородной изотропной среды, ослабленной одиночной полостью //Вестник НАН РК. №1. 2011г. С. 7-8.
4 Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Мир, 1976. 367с.
5 Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Л.: ЛКИ, 2008. 472с.

REFERENCES

1 Amenzade Ju.A. *Teorija uprugosti*. – M.: Vysshaja shkola, **1976**. 272s (in Russ.).
2 Zav'jalov Ju.S, Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. Metody splajn-funkcij. M.: Nauka, **1980**. 353s. (in Russ.).
3 Madaliev T.B. *Vestnik NAN RK,* №1. **2011**, S. 7-8. (in Russ.).
4 Bellman R. *Vvedenie v teoriju matric*. – M.: Mir, **1976**. 367s. (in Russ.).
5 Stepanov V.V. *Kurs differencial'nyh uravnenij*. L.: LKI, **2008**. 472s. (in Russ.).

Т.Б. Мадалиев

КЕЗ КЕЛГЕН ҚИМАДА ШЕКСІЗ-СОЗЫЛҒАН СЕРПІМДІ ЦИЛИНДРЛІ
ДЕНЕЛЕРДІҢ ЖАЗЫҚ ДЕФОРМАЦИЯСЫ ТУРАЛЫ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ЖАҢА БІР ӘДІСІ

(академик Ө.А.Жолдасбеков атындағы механика және
машинатану Институты, Алматы қаласы)

Жұмыста **матрицасы ретпен тіркелген** бастапқы шеттік есептердің қалыпты түрдегі қарапайым сызықты дифференциалдық теңдеу жүйесінің (ҚСДТЖ) шешімін табуға мүмкіндік туғызатын және сплайн-

функцияны қолдануға негізделген жаңа әдіс ұсынылады. Бұл бөлу кестелерінің санына тәуелсіз құрылған ҚСДТЖ арқылы бір рет жалпы шешімін табуға мүмкіндік береді. Содан кейін ҚСДТЖ-мен табылған жалпы шешімінің кез келген константа түрінде алынған параметрлерді қолдана отырып, басты матрицасының құрылымы қолайлы блокты-диагоналды болатын шеттік бастапқы есептер шартын ескере отырып, сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін (САТЖ) тұрғызуға болады. Ұсынылып отырған сандық-аналитикалық шешімдер схемасы қазіргі заманғы компьютерлік математика құралдарын, соның ішінде компьютерлік математиканың **MATLAB** жүйесін тез, әрі тиімді қолдану үшін ыңғайлы.

T.B. Madaliyev

ONE NEW METHOD OF THE DECISION OF A TASK ABOUT FLAT DEFORMATION
OF INDEFINITE – EXTENDED ELASTIC CYLINDRICAL BODIES WITH ANY SECTION

(Institute of Mechanics and Mechanical Engineering named academician U.A. Dzholdasbekov, Almaty)

In the paper one new methods based on application of spline-functions and allowing an initial regional task at the first stage to reduce to finding of the decision of system of the linear ordinary differential equations (SLODE) of a normal kind with the fixed order of its matrix is offered. It allows irrespective of quantity of points of splitting once to find the common decision constructed of SLODE. Then, using the received parameters as any constants of the found common decision of SLODE , it is possible to construct for their calculation, taking into account boundary conditions of an initial regional task, system of the linear algebraic equations (SLAE), with the main matrix having favorable block-diagonal structure. The offered circuit of the numerical – analytical decision is convenient for economical, fast and effective realization by means of modern computer mathematics, in particular, by system of computer mathematics MATLAB.