МЕХАНИКА

УДК 539.3

Т.Б. МАДАЛИЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОДИНОЧНОЙ ПОЛОСТЬЮ

(Представлена академиком НАН РК Г.У. Уалиевым)

В работе исследована возможность эффективного применения аппарата сплайн-функций в задачах механики деформируемого твердого тела. Предложена удобная схема численно-аналитического решения рассматриваемой задачи.

Методы и теория сплайн-функций в решении разнообразных задач математической физики используется давно и очень успешно. Основным достоинством сплайн-функций является очень высокая точность приближения к интерполируемым функциям и ее структура, позволяющая при численной реализации решений разнообразных задач математической физики получать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разряженной матрицей благоприятной структуры, что позволяет экономно и эффективно решать их. Ниже исследуется один случай слоистой однородной ортотропной упругой среды.

Плоское деформированное состояние для ортотропного упругого тела

Рассмотрим упругую среду, составленную из двух бесконечных однородных ортотропных упругих слоев конечной толщины с коэффициентами деформации $a_{11}^1, a_{12}^1, a_{13}^1, a_{22}^1, a_{23}^1, a_{33}^1, a_{44}^1, a_{55}^1, a_{66}^1$ и $a_{11}^2, a_{12}^2, a_{13}^2, a_{22}^2, a_{23}^2, a_{33}^2, a_{44}^2, a_{55}^2, a_{66}^2$ соответственно [1]. Нижний слой при этом возьмем ослабленным бесконечной цилиндрической полостью с сечением в виде эллипса и вытянутой в направлении оси Oz. Будем считать, что на границе бесконечной цилиндрической полости S заданы нагрузки $\vec{P}$, не зависящие от переменной z. На границе Γ_1 соприкосновения двух упругих слоев зададим условия непрерывности перемещения и напряжения. Границы Γ_0 и Γ_2 зададим свободными от нагрузок, а массовые силы отсутствуют.

В этом случае говорят о *чистой плоской деформации*, так как всем уравнениям теории упругости можно удовлетворить, полагая $u_3 = const$ и считая u_1, u_2 функциями только двух переменных x, y.

Возьмем произвольное сечение, нормальное координатной оси Oz, и в полученном сечении разобъем рассматриваемую среду на N вертикальных полос линиями $x = x_i$, $i = 0,...,N$, а полость Ω разделим линиями $x = x_l$, $l = K,...,M$ на $M - K$ полос (на рис. – пунктирные линии).

Введем следующие обозначения:

Обозначим верхний слой через – Ω_1, а нижний слой – Ω_2. Через l_K – обозначим крайнюю линию $x = x_K$, пересекающую границу полости S, а через l_K – крайнюю правую линию $x = x_M$, пересекающую границу S. Область, занимаемую полостью, обозначим через – Ω. Верхнюю и нижнюю части границы S обозначим соответственно через S_1 и S_2 ($S = S_1 \cup S_2$). Область, ограниченную линиями Γ_1, l_K, l_M, S_1, обозначим – Λ_1, а область ограниченную линиями Γ_2, l_K, l_M, S_2, обозначим – Λ_2. Области, ограниченные линиями $l_K, l_{K-1}, R, \Gamma_1$, обозначим V_1; $l_K, l_{K-1}, R, \Gamma_2$ – обозначим V_2; $l_M, l_{M+1}, R, \Gamma_1$ – обозначим W_1; $l_M, l_{M+1}, R, \Gamma_2$ – обозначим W_2. Где $\vec{P}$ – вектор нагрузки, приложенной к границе полости S.

Постановка задачи

1. Найти вектор перемещения $\vec{U}^j(x,y) = (u_1^j, u_2^j)$, $(j = 1,2)$, удовлетворяющий системе уравнений:

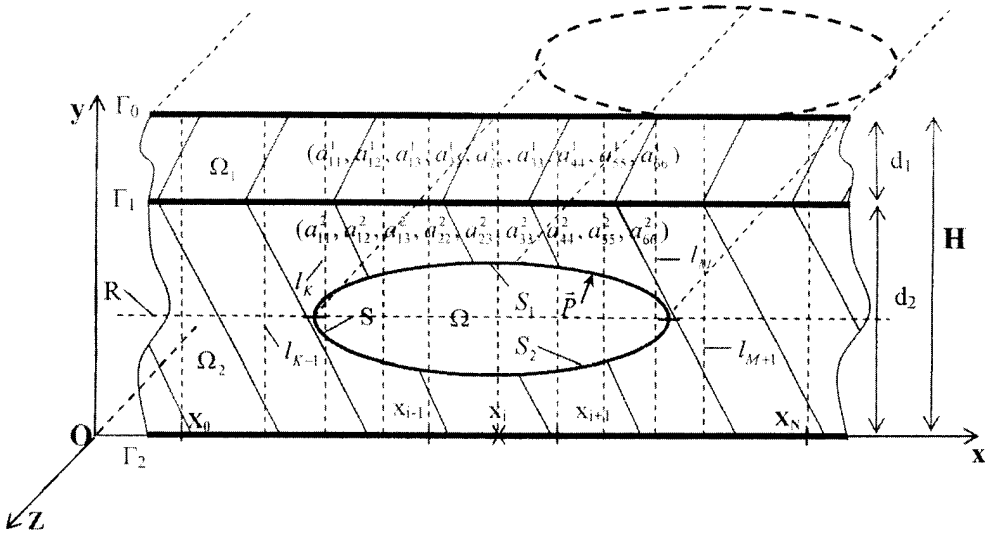

Рис. 1. Двухслойная однородная ортотропная упругая среда, ослабленная эллиптической полостью

$$c_{11}^{j}\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial x^2}+G_{12}^{j}\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial y^2}+(c_{12}^{j}+G_{12}^{j})\frac{\partial^2 u_2^j}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad G_{12}^{j}\frac{\partial^2 u_2^j}{\partial x^2}+c_{22}^{j}\frac{\partial^2 u_2^j}{\partial y^2}+(c_{12}^{j}+G_{12}^{j})\frac{\partial^2 u_1^j}{\partial x\,\partial y}=0,\ (j=1,2)\qquad(1)$$

в каждом из упругих слоев.

2. На границе Γ_1 задаются условия жесткого контакта двух упругих сред в виде: $u_\alpha^1=u_\alpha^2,\quad \alpha=1,2,$

$$G_{12}^{1}\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial y}+\frac{\partial u_2^1}{\partial x}\right)=G_{12}^{2}\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial y}+\frac{\partial u_2^2}{\partial x}\right),\ \left(c_{12}^{1}\frac{\partial u_1^1}{\partial x}+c_{22}^{1}\frac{\partial u_2^1}{\partial y}\right)=\left(c_{12}^{2}\frac{\partial u_1^2}{\partial x}+c_{22}^{2}\frac{\partial u_2^2}{\partial y}\right),\qquad(2)$$

3. Граничное условие на S запишется так:

$$\left(c_{11}^{2}\frac{\partial u_1^2}{\partial x}+c_{12}^{2}\frac{\partial u_2^2}{\partial y}\right)n_1+G_{12}^{2}\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial y}+\frac{\partial u_2^2}{\partial x}\right)n_2=p_1,\ G_{12}^{2}\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial y}+\frac{\partial u_2^2}{\partial x}\right)n_1+\left(c_{12}^{2}\frac{\partial u_1^2}{\partial x}+c_{22}^{2}\frac{\partial u_2^2}{\partial y}\right)n_2=p_2,\qquad(3)$$

4. Граничные условия на Γ_0 и Γ_2, соответственно запишутся:

$$G_{12}^{1}\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial y}+\frac{\partial u_2^1}{\partial x}\right)=0,\ \left(c_{12}^{1}\frac{\partial u_1^1}{\partial x}+c_{22}^{1}\frac{\partial u_2^1}{\partial y}\right)=0,\ G_{12}^{2}\left(\frac{\partial u_1^2}{\partial y}+\frac{\partial u_2^2}{\partial x}\right)=0,\ \left(c_{12}^{2}\frac{\partial u_1^2}{\partial x}+c_{22}^{2}\frac{\partial u_2^2}{\partial y}\right)=0,\qquad(4)$$

5. На бесконечности при $x\to\infty$ будет естественным задать условия:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\vec{U}^{j}(x,y)=0,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\vec{U}^{j}(x,y)\right\}=0,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\vec{U}^{j}(x,y)\right\}=0,\ (j=1,2),\qquad(5)$$

здесь всюду в формулах (1)-(5) упругие постоянные $c_{11}^1, c_{22}^1, c_{12}^1, c_{11}^2, c_{22}^2, c_{12}^2, G_{12}^1, G_{12}^2$ выражаются через коэффициенты деформации или модули упругости деформируемой среды [1]; кроме этого здесь, а также всюду ниже в формулах, верхний индекс означает принадлежность величин к верхнему (индекс 1) или нижнему (индекс 2) упругому слою.

Введем следующие вектора: $\vec{\varphi}(t)\equiv\{\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ h_i\varphi_3(t),\ h_i\varphi_4(t)\};\ \ (i=0,\dots,N-1);$

$$\vec{H}_{(\alpha)i}(y)\equiv\begin{cases}\{f_{(\alpha)i}^{1}(y),\ f_{(\alpha)i+1}^{1}(y),\ g_{(\alpha)i}^{1}(y),\ g_{(\alpha)i+1}^{1}(y)\},\ \text{если}\ (x,y)\in\Omega_1;\ i=0,\dots,N-1,\ \alpha=1,2;\\ \{f_{(\alpha)i}^{2}(y),\ f_{(\alpha)i+1}^{2}(y),\ g_{(\alpha)i}^{2}(y),\ g_{(\alpha)i+1}^{2}(y)\};\ \text{если}\ (x,y)\in\Omega_2;\ i=0,\dots,K-2\ \text{и}\\ \qquad\qquad i=M+1,\dots,N-1,\ \alpha=1,2;\end{cases}$$

$$\vec{Q}_{(\alpha)i}(y) \equiv \begin{cases} \{q^1_{(\alpha)i}(y), q^1_{(\alpha)i+1}(y), \psi^1_{(\alpha)i}(y), \psi^1_{(\alpha)i+1}(y)\}, \text{ если } (x,y) \in \Lambda_1;\ i = K,\dots,M-1;\ \alpha = 1,2; \\ \{q^2_{(\alpha)i}(y), q^2_{(\alpha)i+1}(y), \psi^2_{(\alpha)i}(y), \psi^2_{(\alpha)i+1}(y)\}, \text{ если } (x,y) \in \Lambda_2;\ i = K,\dots,M-1;\ \alpha = 1,2; \end{cases}$$

$$\vec{V}_{(\alpha)K-1}(y) \equiv \begin{cases} \{f^2_{(\alpha)K-1}(y), q^1_{(\alpha)K}(y), g^2_{(\alpha)K-1}(y), \psi^1_{(\alpha)K}(y)\}, \text{если } (x,y) \in V_1;\ \alpha = 1,2; \\ \{f^2_{(\alpha)K-1}(y), q^2_{(\alpha)K}(y), g^2_{(\alpha)K-1}(y), \psi^2_{(\alpha)K}(y)\}, \text{если } (x,y) \in V_2;\ \alpha = 1,2; \end{cases} \tag{6}$$

$$\vec{W}_{(\alpha)M}(y) \equiv \begin{cases} \{q^1_{(\alpha)M}(y), f^2_{(\alpha)M+1}(y), \psi^1_{(\alpha)M}(y), g^2_{(\alpha)M+1}(y)\}, \text{ если } (x,y) \in W_1;\ \alpha = 1,2; \\ \{q^2_{(\alpha)M}(y), f^2_{(\alpha)M+1}(y), \psi^2_{(\alpha)M}(y), g^2_{(\alpha)M+1}(y)\}, \text{ если } (x,y) \in W_2;\ \alpha = 1,2; \end{cases}$$

$$\vec{F}^j_{(\alpha)i}(y) \equiv \begin{cases} \vec{H}_{(\alpha)i}(y), \text{ если } j = 1,2, \text{ а также } i = 0,\dots,N-1, \text{ если } (x,y) \in \Omega_1;\ \alpha = 1,2; \\ \qquad i = 0,\dots,K-2 \text{ и } i = M+1,\dots,N-1, \text{ если } (x,y) \in \Omega_2;\ \alpha = 1,2; \\ \vec{Q}_{(\alpha)i}(y), \text{ если } j = 2,\ (x,y) \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2;\ i = K,\dots,M-1;\ \alpha = 1,2; \\ \vec{V}_{(\alpha)K-1}(y), \text{если } j = 2,\ (x,y) \in V_1 \cup V_2;\ i = K-1;\ \alpha = 1,2; \\ \vec{W}_{(\alpha)M}(y), \text{ если } j = 2,\ (x,y) \in W_1 \cup W_2;\ i = M;\ \alpha = 1,2; \end{cases}$$

здесь $f^j_{(\alpha)i}(y)$, $f^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $g^j_{(\alpha)i}(y)$, $g^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $q^j_{(\alpha)i}(y)$, $q^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $\psi^j_{(\alpha)i}(y)$, $\psi^j_{(\alpha)i+1}(y)$ – неизвестные функции, подлежащие определению из условий рассматриваемой задачи, а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$, h_i, t – функции и величины, определяемые формулами [2]

$$\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t),\quad \varphi_2(t) = t^2(3-2t),\quad \varphi_3(t) = t(1-t)^2,\quad \varphi_4(t) = -t^2(1-t), \tag{7}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i,\quad t = (x - x_i)/h_i, \tag{8}$$

На каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ решение задачи (1)-(5) для указанной области ищем в виде эрмитова кубического сплайна, записанного для удобства в форме скалярного произведения векторов[2]:

$$u^j_\alpha(x,y) = (\vec{\varphi}, \vec{F}^j_{(\alpha)i}),\quad j,\alpha = 1,2,\quad i = 0,\dots,N-1, \tag{9}$$

здесь и всюду ниже в формулах нижний индекс α указывает на соответствующую компоненту вектора перемещения или принадлежность величин к той или иной компоненте вектора перемещения.

С помощью представлений (9) с учетом обозначений (6) запишем каждое из уравнений (1) на произвольном промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,N-1$, через функции $\vec{F}^j_{(\alpha)i}(y)$, $j,\alpha = 1,2$:

$$c^j_{11}(\ddot{\vec{\varphi}}, \vec{F}^j_{(1)i}) + G^j_{12}(\vec{\varphi}, \ddot{\vec{F}}^j_{(1)i}) + (c^j_{12} + G^j_{12})(\dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{F}}^j_{(2)i}) = 0,$$

$$G^j_{12}(\ddot{\vec{\varphi}}, \vec{F}^j_{(2)i}) + c^j_{22}(\vec{\varphi}, \ddot{\vec{F}}^j_{(2)i}) + (c^j_{12} + G^j_{12})(\dot{\vec{\varphi}}, \dot{\vec{F}}^j_{(1)i}) = 0, \tag{10}$$

Следует заметить, что группа уравнений, получаемая из системы (10) при $j = 1$, $(x,y) \in \Omega_1$, решается независимо от других уравнений этой же системы. Эта группа уравнений будет иметь 4(N+1) неизвестных функций $f^1_{(\alpha)i}(y)$, $g^1_{(\alpha)i}(y)$, $i = 0,\dots,N$, $\alpha = 1,2$. Оставшаяся группа уравнений будет представлять собой систему дифференциальных уравнений относительно 4(N+M-K+2) неизвестных функций $f^2_{(\alpha)i}(y)$, $g^2_{(\alpha)i}(y)$, $i = 0,\dots,K-1$ и $i = M+1,\dots,N$; $q^j_{(\alpha)k}(y)$, $\psi^j_{(\alpha)k}(y)$, $k = K,\dots,M$, $j,\alpha = 1,2$.

Для определения неизвестных функций $f^j_{(\alpha)i}(y)$, $f^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $g^j_{(\alpha)i}(y)$, $g^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $q^j_{(\alpha)i}(y)$, $q^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $\psi^j_{(\alpha)i}(y)$, $\psi^j_{(\alpha)i+1}(y)$ необходимо расписать систему уравнений (9) для 4N+2(M-

K)+6 произвольных точек $t_k \in [x_0, x_N]$, при этом на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,...,N-1$, должно содержаться строго внутри не менее двух точек t_k. Для таких точек t_k из системы (10) получим следующую определяющую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами относительно переменной y:

$$c_{11}^j(\ddot{\vec{\varphi}}(t_k), \vec{F}_{(1)i}^j) + G_{12}^j(\vec{\varphi}(t_k), \ddot{\vec{F}}_{(1)i}^j) + (c_{12}^j + G_{12}^j)(\dot{\vec{\varphi}}(t_k), \dot{\vec{F}}_{(2)i}^j) = 0,$$

$$G_{12}^j(\ddot{\vec{\varphi}}(t_k), \vec{F}_{(2)i}^j) + c_{22}^j(\vec{\varphi}(t_k), \ddot{\vec{F}}_{(2)i}^j) + (c_{12}^j + G_{12}^j)(\dot{\vec{\varphi}}(t_k), \dot{\vec{F}}_{(1)i}^j) = 0, \qquad (11)$$

$$(i = 0,...,N-1, \quad k = 1,...,4\mathrm{N} + 2(\mathrm{M}-\mathrm{K}) + 6)$$

Граничные и контактные условия задачи:

Распишем граничное условие (3) в более компактном виде:

на произвольной площадке с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$ будут действовать напряжения

$$\left(c_{11}^j \frac{\partial u_1^j}{\partial x} + c_{12}^j \frac{\partial u_2^j}{\partial y}\right) n_1 + G_{12}^j \left(\frac{\partial u_1^j}{\partial y} + \frac{\partial u_2^j}{\partial x}\right) n_2 = p_1^j, \; G_{12}^j \left(\frac{\partial u_1^j}{\partial y} + \frac{\partial u_2^j}{\partial x}\right) n_1 + \left(c_{12}^j \frac{\partial u_1^j}{\partial x} + c_{22}^j \frac{\partial u_2^j}{\partial y}\right) n_2 = p_2^j, \; (j = 1,2) \quad (12)$$

Подставляя сюда представление (9), получим для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ вектор напряжения, действующий на произвольной площадке с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$:

$$\left(c_{11}^j(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_{(1)i}^j) + c_{12}^j(\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_{(2)i}^j)\right) n_1 + G_{12}^j\left((\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_{(1)i}^j) + (\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_{(2)i}^j)\right) n_2 = p_1^j,$$

$$G_{12}^j\left((\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_{(1)i}^j) + (\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_{(2)i}^j)\right) n_1 + \left(c_{12}^j(\dot{\vec{\varphi}}, \vec{F}_{(1)i}^j) + c_{22}^j(\vec{\varphi}, \dot{\vec{F}}_{(2)i}^j)\right) n_2 = p_2^j, \quad (j = 1,2, \; i = 0,...,N-1) \quad (13)$$

Теперь распишем условия жесткого контакта (2) на Γ_1 и граничные условия (3) на S в точках $x = x_i$, $i = 0,...,N$:

условия жесткого контакта:

для перемещений

$$(\vec{\varphi}(0), \vec{F}_{(\alpha)i}^1(d_2)) = (\vec{\varphi}(0), \vec{F}_{(\alpha)i}^2(d_2)), \quad (\vec{\varphi}(1), \vec{F}_{(\alpha)N-1}^1(d_2)) = (\vec{\varphi}(1), \vec{F}_{(\alpha)N-1}^2(d_2)),$$

$$\alpha = 1,2, \; i = 0,...,N-1, \qquad (14)$$

для напряжений

$$G_{12}^1\left((\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(1)i}^1(d_2) + (\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(2)i}^1(d_2))\right) = G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(1)i}^2(d_2)) + (\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(2)i}^2(d_2))\right),$$

$$\left(c_{12}^1(\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(1)i}^1(d_2)) + c_{22}^1(\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(2)i}^1(d_2))\right) = \left(c_{12}^2(\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(1)i}^2(d_2)) + c_{22}^2(\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(2)i}^2(d_2))\right),$$

$$(i = 0,...,N-1)$$

$$G_{12}^1\left((\vec{\varphi}(1), \dot{\vec{F}}_{(1)N-1}^1(d_2) + (\dot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_{(2)N-1}^1(d_2))\right) = G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(1), \dot{\vec{F}}_{(1)N-1}^2(d_2)) + (\dot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_{(2)N-1}^2(d_2))\right),$$

$$\left(c_{12}^1(\dot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_{(1)N-1}^1(d_2)) + c_{22}^1(\vec{\varphi}(1), \dot{\vec{F}}_{(2)N-1}^1(d_2))\right) = \left(c_{12}^2(\dot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_{(1)N-1}^2(d_2)) + c_{22}^2(\vec{\varphi}(1), \dot{\vec{F}}_{(2)N-1}^2(d_2))\right), \qquad (15)$$

Теперь запишем граничное условие в напряжениях на S в точках $x = x_i$, $i = K,...,M$:

для границы S будем иметь:

$$\left(c_{11}^2(\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(1)i}^2) + c_{12}^2(\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(2)i}^2)\right) n_1 + G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(1)i}^2) + (\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(2)i}^2)\right) n_2 = p_1,$$

$$G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(1)i}^2) + (\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(2)i}^2)\right) n_1 + \left(c_{12}^2(\dot{\vec{\varphi}}(0), \vec{F}_{(1)i}^2) + c_{22}^2(\vec{\varphi}(0), \dot{\vec{F}}_{(2)i}^2)\right) n_2 = p_2, \; i = K,...,M-1,$$

$$\left(c_{11}^2(\dot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_{(1)M-1}^2) + c_{12}^2(\vec{\varphi}(1), \dot{\vec{F}}_{(2)M-1}^2)\right) n_1 + G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(1), \dot{\vec{F}}_{(1)M-1}^2) + (\dot{\vec{\varphi}}(1), \vec{F}_{(2)M-1}^2)\right) n_2 = p_1,$$

$$G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{F}}_{(1)M-1}^2)+(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_{(2)M-1}^2)\right)n_1+\left(c_{12}^2(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_{(1)M-1}^2)+c_{22}^2(\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{F}}_{(2)M-1}^2)\right)n_2=p_2. \quad (16)$$

на Γ_0 будем иметь:

$$G_{12}^1\left((\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{F}}_{(1)i}^1(H))+(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_{(2)i}^1(H))\right)=0,$$

$$\left(c_{12}^1(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_{(1)i}^1(H))+c_{22}^1(\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{F}}_{(2)i}^1(H))\right)=0,\ i=0,\dots,N-1$$

$$G_{12}^1\left((\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{F}}_{(1)N-1}^1(H))+(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_{(2)N-1}^1(H))\right)=0,$$

$$\left(c_{12}^1(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_{(1)N-1}^1(H))+c_{22}^1(\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{F}}_{(2)N-1}^1(H))\right)=0. \quad (17)$$

на Γ_2 будем иметь:

$$G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{F}}_{(1)i}^2(0))+(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_{(2)i}^2(0))\right)=0,\ \left(c_{12}^2(\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_{(1)i}^2(0))+c_{22}^2(\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{F}}_{(2)i}^2(0))\right)=0,\ i=0,\dots,N-1,$$

$$G_{12}^2\left((\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{F}}_{(1)N-1}^2(0))+(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_{(2)N-1}^2(0))\right)=0,\ \left(c_{12}^2(\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_{(1)N-1}^2(0))+c_{22}^2(\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{F}}_{(2)N-1}^2(0))\right)=0, \quad (18)$$

на ∞ при $x\to\infty$ будем иметь:

(в приближении нулевые условия на бесконечности следует заменить на нулевые условия для перемещений и их первых производных согласно представления (9) на концах отрезка $[x_0,x_N]$)

$$(\vec{\varphi}(0),\vec{F}_{(\alpha)0}^j)=0,\quad (\vec{\varphi}(1),\vec{F}_{(\alpha)N-1}^j)=0,\quad (\dot{\vec{\varphi}}(0),\vec{F}_{(\alpha)0}^j)=0,\quad (\dot{\vec{\varphi}}(1),\vec{F}_{(\alpha)N-1}^j)=0,$$

$$(\vec{\varphi}(0),\dot{\vec{F}}_{(\alpha)0}^j)=0,\quad (\vec{\varphi}(1),\dot{\vec{F}}_{(\alpha)N-1}^j)=0,\quad j,\alpha=1,2. \quad (19)$$

Расшифровка полученных соотношений дает нам следующее:

$$f_{(\alpha)0}^j(y)=0,\ f_{(\alpha)N}^j(y)=0,\ g_{(\alpha)0}^j(y)=0,\ g_{(\alpha)N}^j(y)=0,\ \dot{f}_{(\alpha)0}^j(y)=0,\ \dot{f}_{(\alpha)N}^j(y)=0, \quad (20)$$

$$j,\alpha=1,2.$$

Отсюда видно, что третья пара соотношений автоматически является следствием двух первых. Отметим, что полученные соотношения (20) могут быть сразу же использованы и при составлении определяющих уравнений (11) для точек t_k, взятых в крайних отрезках разбиения $[x_0,x_1]$ и $[x_{N-1},x_N]$. В этом случае количество точек $t_k\in[x_0,x_N]$ при составлении системы (11) нужно взять на 4 меньше, т.е. 4N+2(M-K)+2.

Схема решения задачи

Выше исходная краевая задача (1)-(5) сведена к решению определяющих систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами (11) и с гранично-контактными условиями (14)-(20).

Как известно [3], такие системы могут быть сведены к системам линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами нормального типа, теория нахождения решения которых является хорошо изученным разделом высшей математики. Общее решение таких систем будет содержать 8N+4(M-K)+12 произвольных констант, значения которых нужно определить из гранично-контактных условий (14)-(20) рассматриваемой задачи. В результате подстановки найденного общего решения системы (11) в гранично-контактные условия (14)-(20) получим систему линейных алгебраических уравнений порядка 8N+4(M-K)+12, решением которой и определяются искомые произвольные постоянные.

Случай n-слойных ортотропных сред, ослабленных конечным числом (k) полостей

Также, как и выше, схема численно-аналитического решения задачи в случае n-слойных ортотропных сред для конечного числа ($n\ge 3$) упругих слоев и полостей ($k\ge 2$) не вызывает принципиальных трудностей. Схема построения решения для многослойной ортотропной упругой среды будет такой же, что изложено выше. К общей схеме построения решения, добавятся лишь количество

неизвестных функций типа $f^j_{(\alpha)i}(y)$, $f^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $g^j_{(\alpha)i}(y)$, $g^j_{(\alpha)i+1}(y)$ для упругих слоев и функций типа $q^j_{(\alpha)i}(y)$, $q^j_{(\alpha)i+1}(y)$, $\psi^j_{(\alpha)i}(y)$, $\psi^j_{(\alpha)i+1}(y)$, введенных специально вблизи окрестности полостей. Добавятся также количество условий жесткого контакта для упругих слоев и граничных условий на границе полостей.

Случай, когда нижний слой является упругим полупространством, также не представляет принципиальных трудностей. Скажем, для двухслойного полупространства, когда верхний упругий слой имеет конечную толщину, а нижний слой представляет собой бесконечное полупространство, необходимо лишь в уравнениях (14)-(20) при определении произвольных постоянных $C_1,...,C_{16N+8(M-K)+24}$ взять параметры $d_2=\infty$ и $H=\infty$. То есть многослойное упругое полупространство следует рассматривать, как предельный случай многослойной среды, когда толщина нижнего слоя стремится к ∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.

2. *Завьялов Ю.С, Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 353с.

3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. Л.: ЛКИ, 2008. 472с.

Резюме

Деформацияланатын қатты денелер механикасының есептеріне сплайн-функция аппаратын тиімді қолдану мүмкіншілігі зерттелді. Қарастырылатын есептерді шешудің сандық-аналитикалық ыңғайлы схемасы ұсынылды.

Summary

In job the opportunity of effective application of the apparatus of spline - functions in tasks of the mechanics of a deformable firm body is investigated. The convenient scheme of the numerical - analytical decision of a considered task is offered.

Институт механики и машиноведения
им. академика У.А.Джолдасбекова,
г.Алматы

Постула 17.11.2010 г.