УДК 517.977

А. Д. МАЖИТОВА

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК МЕТРИКИ КАРНО-КАРАТЕОДОРИ НА ТРЕХМЕРНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЕ ЛИ

В работе мы даем описание геодезических левоинвариантных субримановых метрик на трехмерной разрешимой группе Ли *SOLV*, используя принцип максимума Понтрягина. Группа *SOLV* широко известна в геометрии, поскольку она допускает компактные факторпространства и на ней реализуется одна из терстоновских геометрий. Согласно классификационной теореме Аграчева–Барилари [1], существует две инвариантные субримановы геометрии, реализуемые на разрешимых, но не нильпотентных, группах Ли. В их классификации наша геометрия отвечает случаю $SOLV^{-}$. Оставшийся случай геометрии $SOLV^{+}$ мы рассмотрим отдельно. Различные аспекты интегрирования геодезических потоков на субримановых многообразиях активно изучались (см., например, [2, 3, 9]). Отметим, что геодезические ряды других трехмерных неразрешимых субримановых геометрий были описаны недавно в [4, 5], при этом геодезические задаются элементарными функциями.

Рассмотрим трехмерную группу Ли *SOLV*, представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

алгебра Ли которых построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а их коммутационные отношения $[e_1,e_2]=0$, $[e_1,e_3]=e_1$, $[e_2,e_3]=-e_2$. Перейдем к новому базису $a_1=e_1+e_2$; $a_2=e_1-e_2$; $a_3=e_3$, т.е.

$$a_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix};\qquad a_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix};$$

$$a_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

тогда для нового базиса коммутаторы следующие $[a_1,a_2]=0$, $[a_1,a_3]=a_2$, $[e_2,e_3]=a_1$. Рассмотрим левоинвариантную метрику на *SOLV*, которая в единице группы задается формой $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$. Группа *SOLV* диффеоморфна пространству R^3 посредством сопоставления матрице (1) точки $q=(x,y,z)$ из R^3. Касательное пространство в каждой точке *SOLV* определяется матрицами вида

$$\partial_x=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\qquad \partial_y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix};$$

$$\partial_z=\begin{pmatrix}-e^{-z}&0&0\\0&e^{z}&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Левые сдвиги для векторов e_1, e_2, e_3 будут следующие

$L_q^*(e_1)=e^{-z}\cdot\partial_x$, $L_q^*(e_2)=e^{z}\cdot\partial_y$, $L_q^*(e_3)=\partial_z$,

а для a_1, a_2, a_3 будут $L_q^*(a_1)=e^{-z}\cdot\partial_x+e^{z}\cdot\partial_y$, $L_q^*(a_2)=e^{-z}\cdot\partial_x-e^{z}\cdot\partial_y$, $L_q^*(a_3)=\partial_z$. Произведениям $\langle L_q^*(a_i),L_q^*(a_j)\rangle$ соответствуют элементы матрицы Грамма

$$\langle a_i,a_j\rangle=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Пусть G – наша разрешимая трехмерная группа, а $\mathfrak{g}$ ее алгебра Ли с базисными векторами a_1, a_2, a_3. Разобьем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ на сумму подпространств $p\oplus k$, где $p=span\{a_1,a_3\}$, $k=span\{a_2\}$. Рассмотрим двумерное левоинвариантное распределение $\Delta=span\{a_1,a_3\}$ в касательном пространстве TG и левоинвариантную метрику, заданную матрицей (2), тогда эта пара задаст левоинвариантную субриманову метрику и можно записать следующее равенство: $g_{ij}=g_p+t\cdot g_k$, где $t\to\infty$, тогда компоненты метрики и элементы ее обратной матрицы следующие:

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1+t}{2}\cdot e^{2z}&\frac{1-t}{2}&0\\\frac{1-t}{2}&\frac{1+t}{2}\cdot e^{-2z}&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$g^{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1+t}{2t}\cdot e^{-2z}&-\frac{1-t}{2}&0\\-\frac{1-t}{2}&\frac{1+t}{2t}\cdot e^{2z}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Возьмем функцию Гамильтона $H=\frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j$ и получим для нашего случая при $t\to\infty$ следующий вид гамильтониана для нашей задачи

$$H=\frac{1}{4}e^{-2z}p_x^2+\frac{1}{2}p_xp_y+\frac{1}{4}e^{2z}p_y^2+\frac{1}{4}p_z^2. \qquad (3)$$

Из известных равенств, выполняющихся для функции Гамильтона

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x},\qquad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y},\qquad \dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z},$$

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x},\qquad \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y},\qquad \dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z},$$

где точка означает производную по t, выпишем уравнения Гамильтона для (3)

$$\dot{x} = \frac{1}{2}e^{-2z}\cdot p_x + \frac{1}{2}p_y, \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}e^{2z}\cdot p_y + \frac{1}{2}p_x,$$

$$\dot{z} = p_z; \tag{4}$$

$$\dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = 0, \quad \dot{p}_z = \frac{1}{2}e^{-2z}\cdot p_x^2 + \frac{1}{2}e^{2z}\cdot p_y^2.$$

Система (4) имеет три первых интеграла

$$I_1 = H, \qquad I_2 = p_x, \qquad I_3 = p_y.$$

Значит, наша система уравнений полностью интегрируема. Не теряя общности, будем полагать, что все геодезические берут начало в единице группы, то есть справедливы следующие начальные условия

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0.$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_x}{\sqrt{2}} = a - \text{const}, \quad \frac{p_y}{\sqrt{2}} = b - \text{const}.$$

Подставив эти выражения в гамильтониан (3), найдем выражение для p_z и, применив его к третьему уравнению системы (4), получим

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - (a + bu^2)^2}}, \quad \text{где} \quad u = e^z. \tag{5}$$

Последнее выражение, за исключением вырожденных случаев (их у нас три), не интегрируется в элементарных функциях, а является эллиптическим интегралом. Проинтегрируем нашу систему для всех этих случаев

1) $a = 0$, $b \neq 0$,

$$x(t) = \frac{b}{\sqrt{2}}\cdot t \tag{6}$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}\left(2\left(1+\sqrt{1-b^2}\right)-b^2\right)}{2b\left(1+\sqrt{1-b^2}\right)-b^3+b^3\cdot e^{2t}} + \frac{\sqrt{2}\left(2\left(1+\sqrt{1-b^2}\right)-b^2\right)}{2b\left(1+\sqrt{1-b^2}\right)}$$

$$z(t) = \ln\frac{2b\left(1+\sqrt{1-b^2}\right)\cdot e^t}{2b\left(1+\sqrt{1-b^2}\right)-b^2+b^2\cdot e^{2t}}$$

2) $b = 0$, $a \neq 0$,

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}\cdot a}{e^{2t}\left(2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)-a^2\right)+a^2} + \frac{\sqrt{2}\cdot a}{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}$$

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot t \tag{7}$$

$$z(t) = \ln\left(\frac{a^2}{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)\cdot e^t} + \frac{\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)\cdot e^t}{2}\right)$$

3) $D = 1 - 4ab = 0$, где D – дискриминант подкоренного выражения интеграла (5)

$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad y(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad z(t) = 0, \quad a = b = \frac{1}{2}; \tag{8}$$

$$x(t) = -\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad y(t) = -\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad z(t) = 0, \quad a = b = -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

4) Общий случай

$$x(t) = -\frac{ak^2 sn(\sigma_1 bt,k)\cdot cn(\sigma_1 bt,k)}{\sqrt{2}\sigma_1 bk'^2\sqrt{1-k^2 sn^2(\sigma_1 bt,k)}} + \frac{a\cdot E(am(\sigma_1 bt,k),\ k)}{\sqrt{2}\sigma_1 bk'^2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\cdot t$$

$$y(t) = \frac{E(am(\sigma_1 bt,k),\ k)}{\sqrt{2}\sigma_1} + \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot t$$

$$z(t) = \ln\ dn(\sigma_1 bt,k),$$

где k является модулем эллиптической функции и справедливо равенство $k^2 + k'^2 = 1$. Полученные выше уравнения геодезических, как решений гамильтоновой системы, задают нормальные геодезические. В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема. На трехмерной разрешимой группе Ли существуют только нормальные геодезические потоки субримановой метрики, следовательно, все геодезические являются гладкими.

Анормальные геодезические еще Монтомери Р. рассматривал в своей работе [8]. Приведем общее определение анормальных геодезических, формулировка которого была дана в работе [6].

Определение. Анормальная геодезическая – это геодезическая, которая является проекцией на группе G абсолютно непрерывной кривой в аннигиляторе $\Delta^{\perp} \subset T^*G$ для распределения Δ, которая не пересекает нулевое сечение и чья производная лежит в ядре канонической симплектической формы ограниченной на Δ.

Рассмотрим 1-форму η на T^*G. Пусть $a \in T^*G$, а вектор $v \in T_a(T^*G)$, тогда $\eta_a(v) = \alpha(\pi_* v)$, где $\pi_* v$ – это проекция вектора v на T^*G. Покажем, что

$$\eta_a = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\alpha)_m ,$$

где индекс m означает соответствующую 1-форму на T^*G, а λ_i – координаты ковекторов в двойственном к a_1, a_2, a_3 базисе $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Действительно, разложим вектор v по базису $v = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i a_i + \sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \in T(T^*G)$, тогда по определению η можно получить

$$\eta_a(v) = \alpha(\pi_* v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\alpha)_m \left(\sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i a_i \right) = \sum_{m=1}^{3} \lambda_m (\alpha) \dot{q}_m .$$

Напомним, что наше распределение $\Delta = span\{a_1, a_3\}$, а аннигилятором для него является $\Delta^{\perp} = span\{\theta_2\}$. Тогда мы имеем $\eta_{|\Delta^{\perp}} = \lambda_2 (\alpha)_m$, $\omega = d\eta$, $\omega_{|\Delta^{\perp}} = d\lambda_2 \wedge_m + \lambda_2 d_2$.

Пусть $(q(t), \lambda(t)) \in T^*G$, где $q(t)$ – анормальная кривая и $\dot{q}(t) = \dot{q}_1 a_1 + \dot{q}_3 a_3$, $\dot{q}_2 = 0$, $\lambda \neq 0$, $\dot{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, тогда

$$\omega_{(q,\lambda)}\left(\left(\dot{q}, \dot{\lambda} \right), \circ \right) =$$

$$= \left(\dot{\lambda}_2 \right)_2 - \dot{q}_2 \, d\lambda_2 + \lambda_2 d_2 \left(\left(\dot{q}, \dot{\lambda} \right), \circ \right) = 0. \quad (10)$$

По уравнениям Маурера–Картана

$$d\theta_k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} \theta_i \wedge \theta_j ,$$

где α_{ijk} – структурные константы алгебры Ли:

$$[a_i, a_j] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} a_k$$

и учитывая, что среди них только две не равны нулю:

$$\alpha_{132} = -\alpha_{312} = 1, \qquad \alpha_{231} = -\alpha_{321} = 1$$

вычислим, что

$$d_2\left(\left(\dot{q}, \dot{\lambda} \right), \circ \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\alpha_{312}\left(\left(\dot{q}_3 \right)_1 - \left(\dot{q}_1 \right)_3 \right) + \alpha_{132}\left(\left(\dot{q}_1 \right)_3 - \left(\dot{q}_3 \right)_1 \right) \right].$$

Подставляя в уравнение (10), получим

$$\left(\dot{\lambda}_2 \right)_2 + \left(\dot{q}_3 \right)_1 - \left(\dot{q}_1 \right)_3 = 0, \quad \dot{q}_2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 0.$$

Поскольку формы **1, 2, 3** независимы, это немедленно влечет

$$\dot{\lambda}_2 = 0, \quad \dot{q}_3 = 0, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad \dot{q}_2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 0.$$

Таким образом, уравнения для анормальных геодезических следующие

$$\dot{x}(t) = 0, \quad \dot{y}(t) = 0, \quad \dot{z}(t) = 0,$$

$$p_x = 0, \quad \dot{p}_y = 0, \; p_z = 0.$$

Решение этих уравнений с начальными данными в единице группы является стационарным. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agrachev, A., and Barilari, D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups, arXiv: 1007, 4970.

2. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

3. *Сачков Ю.Л.* Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. М: Физматлит, 2007.

4. *Boscain, U., and Rossi, F.* Invariant Carnot-Caratheodory metrics on $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{SO}^3$, $\mathbf{SL}^2$ and lens spaces // SIAM J. ControlOptim, 47 (2008). P. 1851-1878.

5. *Calin, O., Chang Der-Chen, and Markina, I.* SubRiemannian geometry on the sphere $\mathbf{S}^3$ // Canad. J. Math. **61** (2009). P. 721-739.

6. *Gole, C., and Karidi, R.* A note on Carnot geodesics in nilpotent Lie Groups // J. Dynam. and Control Syst. **1** (1995). P. 535-549.

7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

8. *Montgomery R.* Abnormal minimizers // SIAM J. Control Optim. **32** (1994). P. 1605-1620.

9. *Taimanov, I.A.* Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics // J. Dynam. and Control Syst. **3** (1997). P.129-147.

Резюме

Үш өлшемді Ли тобындағы субриман көпбейнелігі қарастырылған. Жалпы жағдайда эллипстік функциялар арқылы, ал кейбір дербес жағдайларда элементар функциялар арқылы геодезиялық қисықтардың теңдеулері табылған. Аталған субриман есебі үшін абнормал геодезиялық қисықтар жоқ екені дәлелденген.

Негізгі сөздер: геодезиялық қисықтар, субриман көпбейнелігі, гамильтониан.

Summary

It had been considered sub-Riemannian manifold into three-dimensional solvable Lie group. Obtained the equations of geodesics in the general case of elliptic functions, as well as for some special cases in elementary functions. Proved that for a given sub-Riemannian problem abnormal geodesics do not exist.

Key words: geodesic, Sub-Riemannian manifold, Hamiltonian.

КазНТУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 10.09.10г.