УДК 539.3

Н. И. МАРТЫНОВ

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Аннотация. Получены однозначно разрешимые интегральные уравнения по области, позволяющие сразу определять обобщенные решения статических краевых задач для составных неоднородных изотропных упругих сред упрощенной модели Коссера.

Ключевые слова: изотропное тело, интегральные уравнения, краевая задача, индекс.

Тірек сөздер: изотроптық дене, интегралдық теңдеулер, шеттік есеп, көрсеткіш.

Keywords: isotropic body, the integrated equation, region problem, index.

Введение. В работах [1, 2] двумерные краевые задачи статики и задачи кручения теории упругости неоднородных анизотропных сред приведены к краевым задачам Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора. Это позволяет логически перенести методологию Н. И. Мусхелишвили (метод комплексных потенциалов) [3] с однородных упругих сред на неоднородные упругие среды и задействовать уже разработанный аппарат [4, 5], сводящий краевую задачу Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора к эквивалентной системе контурных сингулярных интегральных уравнений. Метод контурных сингулярных интегральных уравнений универсален, и его целесообразно использовать при решении некоторых частных задач (например, для однородных сред), а также в теоретических исследованиях.

Для решения практически важных задач метод контурных интегральных уравнений не очень удобен [4, 5], так как связан с трудоемкими дополнительными процедурами: приведением системы уравнений к каноническому виду, построением фундаментальных решений, резольвентных ядер и общего решения. Поэтому естественно встает вопрос о том, нельзя ли с помощью интегральных операторов по области, минуя все промежуточные звенья, решать краевые задачи. Оказывается, что во многих случаях это возможно. Теория, базирующая на таком подходе, называется теорией квазианалитического вектора [4, 6]. При этом отпадают многие требования на гладкость упругих параметров, расширяется класс изучаемых уравнений и краевых задач.

В работах [7, 8] в случае односвязной области выведены однозначно разрешимые интегральные уравнения по области для первой и второй краевых задач статической теории упругости неоднородной анизотропной среды, позволяющие сразу определять обобщенные решения для составных упругих сред, с изменяющейся по области анизотропией. Для однородного анизотропного материала решения краевых задач получены в замкнутом виде, т.е. выражаются через контурные интегралы и интегралы по области.

В работе [9] с определенными модификациями перенесены результаты работ [7, 8] на плоские краевые задачи общей моментной теории упругости неоднородной изотропной среды.

В настоящем исследовании излагаются результаты, имеющие свою специфику и аналогичные результатам работы [9] для упрощенной моментной теории упругости неоднородной изотропной среды.

1. Основные соотношения. В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ при условии плоской деформации, рассмотрим равновесие изотропного неоднородного линейно-упругого тела, занимающего односвязную область D с границей Γ в поле объемных сил $f=(f_1,f_2,0)$ и объемных моментов $F=(0,0,F_3)$. Такое напряженно-деформируемое состояние описывается векторами перемещений $u=(u_1,u_2,0)$ и углами поворота $\omega=(0,0,\ \omega_3)$, а также компонентами несимметричных тензоров напряжений σ_{ij} и моментных напряжений μ_{ij} (i,j=1,2,3), причем: $\sigma_{13}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=\sigma_{32}=0$, $\mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{12}=\mu_{21}$.

Деформируемое состояние характеризуется несимметричным тензором деформаций γ_{ij} и тензором изгиба – кручения $\varkappa_{ij}$, причем [10]:

$$\gamma_{11}=u_{1,1},\ \ \gamma_{22}=u_{2,2},\ \ \gamma_{12}=u_{2,1}-\omega_3, \gamma_{21}=u_{1,2}+\omega_3 \qquad (1)$$
$$\varkappa_{13}=\omega_{3,1}, \varkappa_{23}=\omega_{3,2}\ ,$$

где запятая после индекса означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Закон Гука, связывающий деформационные и силовые характеристики среды, имеет следующий вид [10]:

$$\sigma_{11}=2\mu\gamma_{11}+\lambda\gamma_{\kappa\kappa}, \sigma_{22}=2\mu\gamma_{22}+\lambda\gamma_{\kappa\kappa}, \sigma_{33}=\lambda\gamma_{kk}, \gamma_{kk}=\gamma_{11}+\gamma_{22}$$
$$\sigma_{12}=(\mu+\alpha)\gamma_{12}+(\mu-\alpha)\gamma_{21}, \sigma_{21}=(\mu+\alpha)\gamma_{21}+(\mu-\alpha)\gamma_{12}, \qquad (2)$$
$$\mu_{13}=(\delta+\varepsilon)\varkappa_{13}, \qquad \mu_{23}=(\delta+\varepsilon)\varkappa_{23}, \qquad \mu_{31}=(\delta-\varepsilon)\varkappa_{13}, \mu_{32}=(\delta-\varepsilon)\varkappa_{23},$$

где λ, μ, δ, α, ε – упругие модули, зависящие от координат (x_1,x_2). Для плоского деформированного состояния имеем три уравнения равновесия:

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{21,2}+f_1=0, \sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+f_2=0,$$
$$(\sigma_{12}-\sigma_{21})+\mu_{13,1}+\mu_{23,2}+F_3=0 \qquad (3)$$

Перейдем на плоскость комплексных переменных и введем комплексные операторы:

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} \equiv s = x_1 - ix_2, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{4}$$

где i - мнимая единица ($i^2 = -1$). Введем комплексные компоненты тензоров напряжений, деформаций и перемещений [11] , а также следы от объемных сил и объемных моментов:

$$T_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + i(\sigma_{12} - \sigma_{21}), \qquad T_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + i(\sigma_{12} + \sigma_{21}), T_5 = \sigma_{33}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}((\gamma_{11} + \gamma_{22}) + i(\gamma_{12} - \gamma_{21})), \gamma_2 = \frac{1}{2}((\gamma_{11} - \gamma_{22}) + i(\gamma_{12} + \gamma_{21})). \tag{5}$$

$$M = \mu_{13} + i\mu_{23}, \varkappa = \varkappa_{13} + i\varkappa_{23}, W = W_1 + iW_2$$

$$\theta_1 = \int_{x0_1}^{x_1} f_1 dx_1, \quad \theta_2 = \int_{x0_2}^{x_2} f_2 dx_2, \; m = \int_{x0_1}^{x_1} F_3 dx_1$$

Тогда соотношения (1)-(3) запишутся в виде:

$$\gamma_1 = W_z - i\omega, \gamma_2 = W_s, (\omega = \omega_3)$$

$$T_1 = 2(\lambda + \mu + \alpha)W_z + 2(\lambda + \mu - \alpha)\overline{W}_s - 4i\alpha\omega, T_2 = 4\mu W_s, M = 2(\delta + \varepsilon)\omega_s \tag{6}$$

$$(T_1 + \theta_1 + \theta_2)_s + (T_2 + \theta_1 - \theta_2)_z = 0,$$

$$(M + m)_z + \left(\overline{M + m}\right)_s - \frac{i}{2}\left(T_1 - \overline{T}_1\right) = 0 \tag{7}$$

Индексы z, s означают соответствующие производные (4). Введем функции напряжений U, ψ:

$$T_1 + \theta_1 + \theta_2 = 4U_z, T_2 + \theta_1 - \theta_2 = -U_s, M - 2iU + m = 2i\psi_s \tag{8}$$

Тогда уравнения равновесия (7) удовлетворяются автоматически, а закон Гука запишется в виде:

$$U_z = p_1 W_z + p_2 \overline{W}_s - i\alpha\omega + g_1,$$

$$U_s + \mu W_s + g_2 = 0, \tag{9}$$

$$(\delta + \varepsilon)\omega_s - iU + \frac{m}{2} = i\psi_s,$$

где

$$p_1 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \alpha), \;\; p_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \alpha), g_1 = \frac{1}{4}(\theta_1 + \theta_2), g_2 = \frac{1}{4}(\theta_1 - \theta_2)$$

В работе [9] показано, что разрешение закона Гука (9), записанного в комплексной форме и связывающего между собой силовые и деформационные характеристики упругого тела с соответствующими граничными условиями эквивалентно разрешению соответствующих краевых задач традиционными методами [10]. Поэтому на соотношения (9) можно посмотреть как на систему уравнений первого порядка относительно $U, \overline{U}, W, \overline{W}, \omega, \psi$. Присоединив соответствующие граничные условия основных задач теории упругости, получим соответствующие краевые задачи теории обобщенного аналитического (квазианалитического) вектора.

В упрощенной модели братьев Коссера принято [10], что поворот локального трехгранника равен среднему повороту поля перемещений:

$$\gamma^A = \frac{1}{2} rot\vec{u} - \vec{\omega} = 0 \;, \tag{10}$$

и взаимодействие сил через произвольную поверхность тела происходит за счет несимметричных напряжений и моментных напряжений μ_{ij}. При этом величина $\sigma^A = 2\alpha\gamma^A$ становится в силу наложенной кинематической связи (10) опорной силой в смысле Хамеля, при этом тензор деформаций γ_{ij} становится симметричным: $\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Применительно к плоской деформации для упрощенной модели Коссера из приведенных выше соотношений , имеем:

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 2\sigma^A, \quad \sigma_{12} = 2\mu\gamma_{12} + \sigma^A, \quad \sigma_{21} = 2\mu\gamma_{12} - \sigma^A, \; T_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2i\sigma^A, \; T_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 4i\gamma \tag{11}$$

$$U_z = \frac{(\lambda + \mu)}{2}(W_z + \overline{W}_s) + \frac{i\sigma^A}{2} + g_1 \tag{12}$$

Остальные величины вычисляются по прежним формулам.

Исключая из (12) и его комплексно-сопряженного выражения опорную силу, запишем закон Гука с учетом (10) в виде:

$$U_z+\overline{U}_s=(\lambda+\mu)(W_z+\overline{W}_s)+2g_1$$
$$U_s+\mu W_s+g_2=0,$$
$$(\delta+\varepsilon)\omega_s-iU+\frac{m}{2}=i\psi_s, \tag{13}$$
$$\omega=\frac{i}{2}(\overline{W}_s-W_z)$$

2. Приведение к каноническому виду. Задача Римана-Гильберта. Будем предполагать, что упругие параметры в (13), непрерывно дифференцируемые функции во всей области D, включая границу $Г$.

С помощью замены переменных

$$U=0{,}5u+\mu\bar{v},W=eu-\bar{v},q=(\delta+\varepsilon)\omega-i\psi,\quad e=0,5(2\lambda+3\mu)^{-1} \tag{14}$$

систему уравнений (13) приведем к каноническому (по И. Г. Петровскому [5]) виду:

$$X_{\bar{z}}-QX_z=AX+B\overline{X}+Y=F\ ,\ \|Q\|<1 \tag{15}$$

Здесь матрицы X, Y, Q, A, B имеют следующий вид:

$$X=\begin{pmatrix}u\\v\\q\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0&0&0\\-\dfrac{1}{2}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&0&a_{33}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&b_{12}&0\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\0&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

где

$$a_{11}=-\mu d_1\ ,\ a_{21}=0,5\mu\frac{d_1}{(2\lambda+3\mu)}\ ,\ a_{22}=-0,5\frac{\mu_s}{(\lambda+2\mu)}\ ,$$
$$a_{23}=b_{23}=\frac{i}{2(\delta+\varepsilon)}\ ,\ a_{31}=0,5i,\ a_{33}=b_{33}=\frac{(\delta+\varepsilon)_s}{2(\delta+\varepsilon)}\ ,\ b_{12}=-\mu_s d_2\ ,\ b_{22}=\overline{a}_{22},$$
$$b_{21}=-0,5d_1\ ,\ b_{32}=\mu\ ,\ Y_1=-g_2d_2\ ,\ Y_2=\frac{g_1}{(\lambda+2\mu)},\ Y_3=-0,5m \tag{17}$$
$$d_1=\frac{(2\lambda+3\mu)_s}{2(2\lambda+3\mu)(\lambda+2\mu)},\quad d_2=\frac{(2\lambda+3\mu)}{(\lambda+2\mu)}$$

В (15) X – неизвестный обобщенный аналитический (квазианалитический) вектор.

Краевая задача Римана-Гильберта для обобщенного аналитического (квазианалитического) вектора формулируется следующим образом: определить обобщенный аналитический вектор, непрерывный в смысле Гельдера в $D+Г$ и удовлетворяющий граничному условию

$$Re\left(\overline{G(t)}X(t)\right)=L(t)\ , \tag{18}$$

где $G(t)$ – заданная и непрерывная по Гельдеру на $Г$ матрица $(\det G(t)\neq 0)$ и $L(t)$ – заданный непрерывный по Гельдеру, действительный вектор [4]. Условия на G, L можно ослабить, рассматривая их в классе суммируемых функций [4-6].

Рассмотрим первую краевую задачу теории упругости, когда на границе заданы усилия.

$$\sigma_{11}n_1+\sigma_{21}n_2=r_1\ ,$$
$$\sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2=r_2\ , \tag{19}$$
$$\mu_{13}n_1+\mu_{23}n_2=R_3=R$$

Границу $Г$ области D будем проходить против часовой стрелки, тогда область D при обходе контура остается слева и внешняя нормаль к контуру $Г$, записанная в комплексной форме имеет вид:

$$n = n_1 + in_2 = \frac{dx_2}{d\sigma} - i\frac{dx_1}{d\sigma} = -i\frac{dz}{d\sigma}\,, \tag{20}$$

где $d\sigma$ – длина элементарной дуги контура.

Учитывая (5), (19), (20) граничные условия (8) запишутся в виде:

$$nT_1 + \bar{n}T_2 = 2r = 2(r_1 + ir_2), \qquad \bar{n}M + n\bar{M} = 2R\,, \tag{21}$$

а через функции напряжений (11) как:

$$U_\Gamma = r_* = C_1 + \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma}\left(ir + \theta_2\frac{dx_1}{d\sigma} + i\theta_1\frac{dx_2}{d\sigma}\right)d\sigma\,,$$

$$\psi_\Gamma = R_* = C_2 - \int_{\sigma_0}^{\sigma}\left(R + m\frac{dx_2}{d\sigma} + \frac{\bar{r}_* dz}{d\sigma} + r_*\frac{ds}{d\sigma}\right)d\sigma \tag{22}$$

где произвольные постоянные C_1, C_2 для односвязной области, без потери общности, можно положить равными нулю.

Разделяя в (18) действительную и мнимые части и учитывая (14), получим:

$$\overline{G_1} = \begin{pmatrix} 0{,}5\mu^{-1} & 1 & 0 \\ -0{,}5i\mu^{-1} & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re\left(r_*/\mu\right) \\ Im\left(r_*/\mu\right) \\ R_* \end{pmatrix}, \det(\mathbf{G_1}) = \mu^{-□} \neq 0 \tag{23}$$

Для второй краевой задачи теории упругости, когда на границе области заданы перемещения W_*, ω_*, аналогичными рассуждениями как и для первой краевой задачи, получим:

$$\overline{G_2} = \begin{pmatrix} e & -1 & 0 \\ -ie & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re(W_*) \\ Im(W_*) \\ \omega_*(\delta + \varepsilon) \end{pmatrix}, \det(\mathbf{G_2}) = 2□\mathbf{e} \neq 0 \tag{24}$$

Для третьей, смешанной краевой задачи (на части границы заданы усилия, на другой ее части заданы перемещения) матрицы G_3, L_3 принимают, соответственно, значения G_1, L_1 или G_2, L_2, и терпит разрыв на множестве меры нуль.

Таким образом, основные краевые задачи плоской моментной теории упругости изотропного неоднородного тела сводятся к краевой задаче Римана-Гильберта для обобщенно-аналитического (квазианалитического) вектора.

Отметим, что индексы первой и второй краевых задач в случае непрерывных G_1, L_2 равны нулю [6], что видно из (23), (24) ($\det\overline{G_i}$ ($i = 1{,}2$) принимают действительное или чисто мнимое значения, нигде необращающиеся в нуль). Для третьей краевой задачи разрывная матрица G_3 в граничном условии с помощью определенной процедуры сводится к непрерывной матрице [6, 12].

3. Интегральные уравнения по области для канонической системы уравнений.

При исследовании краевых задач эллиптических систем $2m$ уравнений ($m > 1$) первого порядка для квазианалитического вектора предварительно производят конформное отображение односвязной области на единичный круг. Такое отображение не изменяет свойств решений системы уравнений, но позволяет упростить граничные условия. Рассмотрим операторы, действующие на функциях, определенных в круге **K** ($|z|<1$), которые используются в дальнейшем:

$$T_0 f = -\frac{1}{\pi}\iint_K\left[\frac{f(t)}{t-z} + \frac{z\overline{f(t)}}{1-z\bar{t}}\right]dk_t$$

$$S_0 f = -\frac{1}{\pi}\iint_K\left[\frac{f(t)}{(t-z)^2} + \frac{\overline{f(t)}}{(1-z\bar{t})^2}\right]dk_t \tag{25}$$

Для них справедливы соотношения:

$$\frac{\partial T_0 f}{\partial s} = f, S_0 f = \frac{\partial T_0 f}{\partial z}, \quad \mathrm{Re}T_0\left(f \mid e^{i\gamma}\right) = 0, \quad \text{при} \quad z = e^{i\gamma}, \gamma \in [0, 2\pi] \tag{26}$$

Первый из них является регулярным, а второй – сингулярным интегралом в смысле главного значения по Коши ($S_0 f$ существует при $f \in L_p(\boldsymbol{K})$ и $\|S_0 f\|_{L_p} \leq \lambda_p \|f\|_{L_p}$, где λ_p – ограниченная постоянная, зависящая только от p, т.е оператор S_0 является линейным и ограниченным в $L_p(\boldsymbol{K})$, $p > 1$ (L_p-пространство функций, интегрируемых в **K** со степенью p) [4-6].

Рассмотрим первую и вторую краевые задачи для неоднородного изотропного тела в единичном круге. Поскольку индексы краевых задач равны нулю, то решение (15), (18) в круге $|z| < 1$ ищется в виде [6, 13]:

$$X = \Phi + T_0\rho, \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ - голоморфный вектор, T_0 - оператор определяемый (25). После подстановки (27) в (15), (18), получим:

$$\rho - QS_0\rho = Q\Phi' + A(T_0\rho + \Phi) + B\overline{(T_0 + \Phi)} + Y \tag{28}$$

$$Re\overline{(G\Phi)} = L \tag{29}$$

Для решения интегрального уравнения (28) предварительно необходимо определить голоморфный вектор, удовлетворяющий краевому условию (29). То есть решить задачу Римана – Гильберта для голоморфного вектора. Как показано в [9], он определяется в явном виде: через значения известных функций на контуре и контурные интегралы.

При конформном отображении $z = \sigma(\eta)$ односвязной области на единичный круг дифференцирование по z заменяется дифференцированием по η. Матрица Q в (15) умножается на матрицу $\frac{\overline{\sigma}'}{\sigma'} I$, а правая часть (15) – на $\overline{\sigma}'I$ (I – единичная матрица). Матрицы G_1, G_2 остаются прежними. Поэтому аналитические вектора определяются в замкнутом виде и для односвязной области.

Отметим, что разработана методика решения краевых задач в классе аналитических функций с суммированными (а не кусочно-гельдеровскими) функциями в граничных условиях [6, 12, 14]. К ним относится и задача Римана–Гильберта для аналитического вектора.

Система интегральных уравнений (15) в общем случае реализуется численным методом. Она может быть реализована, например, итерационным численным методом Ч. Ашыралиева-В. Н. Монахова [15] с геометрической скоростью сходимости.

4. Интегральные уравнения для составных тел. Теоремы существования и единственности. Для составных изотропных упругих тел необходимо в каждой подобласти привести систему уравнений (13) к каноническому виду, записать условия сопряжения на границе контакта подобластей (равенство сил и моментов, а также поступательных и угловых перемещений), получить решения в каждой подобласти с учетом граничных условий на границе области, и затем провести процедуру сшивки решения. Громоздкость этих процедур ясно показывает, что такой подход не очень удобен для практических расчетов.

Для того, чтобы упростить исследования в этом направлении и ослабить условия на гладкость упругих параметров, введем неизвестные функции u, v, h:

$$U = u + \frac{\overline{v}}{e_0}, \; W = a(u - \frac{\overline{v}}{e_0}), \; \omega = b(h + \overline{h}), \; -i\psi = (h - \overline{h}), \tag{30}$$

где e_0, a, b – положительные, пока неопределенные действительные постоянные. Подставляя (30) в систему уравнений (13) и ряда несложных преобразований, получим:

$$X_s - \mu_1 X_z - \mu_2 \overline{X}_s = AX + B\overline{X} + N, \tag{31}$$

где

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}, \; \mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu_1^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2^{12} & 0 \\ \mu_2^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^{33} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} N_1 = -\frac{g_2}{1 + a\mu}, \; N_2 = \frac{g_1 e_0}{1 + a(\lambda + \mu)}, \; N_3 = -\frac{im}{2(1 + b(\delta + \varepsilon))}, \; \mu_2^{12} = -\frac{1 - a\mu}{e_0(1 + a\mu)}, \; \mu_1^{21} = -\frac{e_0}{(1 + a(\lambda + \mu))}, \\ \mu_2^{21} = \frac{e_0 a(\lambda + \mu)}{(1 + a(\lambda + \mu))}, \; \mu_2^{33} = -\frac{1 - b(\delta + \varepsilon)}{1 + b(\delta + \varepsilon)}, \; a_{23} = b_{23} = \frac{ibe_0}{a}, \; a_{31} = b_{32} = \frac{i}{1 + b(\delta + \varepsilon)} \end{gathered} \tag{32}$$

В реальной ситуации упругие модули, объемные силы и объемные моменты ограничены. Условие эллиптичности системы уравнений (31) имеет вид [6]:

$$\max_i \sum_{j=1}^{2} \left|\mu_1^{ij}\right| + \max_i \sum_{j=1}^{2} \left|\mu_2^{ij}\right| \le \mu_0 < 1 \tag{33}$$

В нашем случае оно сводится к виду:

$$\left|\mu_{21}^{2}\right| < 1, \quad \left|\mu_1^{21}\right| + \left|\mu_2^{21}\right| < 1, \quad \left|\mu_2^{33}\right| < 1 \tag{34}$$

Обозначим $k_1 = \mu_{\max}\mu_{\min}^{-1}$, $k_2 = (\delta+\varepsilon)_{\max}(\delta+\varepsilon)_{\min}^{-1}$, и положим:

$$a = n_1\mu_{\min}^{-1}, \quad b = n_2(\delta+\varepsilon)_{\min}^{-1}, \quad n_1, n_2 > 1, \quad e_0 = (2k_1n_1 - 1)(2k_1n_1 + 1)^{-1} < 1, \tag{35}$$

где n_1, n_2 – фиксированные числа. Тогда неравенства (34), как нетрудно видеть, выполняются.

Хорошо известно, что решения эллиптических систем непрерывны, т.е не могут иметь сильные разрывы [16]. Следовательно, на границах раздела контактных подобластей вектор X непрерывен, и тогда в силу подстановки (30), непрерывны ω, ψ, W, U . Таким образом, для системы уравнений (31) автоматически выполняются условия сшивки решений.

При конформном отображении $z = \sigma(\eta)$ односвязной области на единичный круг дифференцирование по z заменяется дифференцированием по η. Матрица μ_1 в (31) умножается на матрицу $\frac{\overline{\sigma}'}{\sigma'} I$, а правая часть (31) – на $\overline{\sigma}'I$. Матрицы G_1, G_2 остаются прежними.

Учитывая (30) , граничные условия для первой краевой задачи запишутся в виде (18), где

$$\overline{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & e_0^{-1} & 0 \\ -i & ie_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} Re(r_*) \\ Im(r_*) \\ 0{,}5R_* \end{pmatrix} \tag{36}$$

Для второй краевой задачи:

$$\overline{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & -e_0^{-1} & 0 \\ -i & -ie_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} Re\left({W_*}/{a}\right) \\ Im\left({W_*}/{a}\right) \\ {\omega_*}/{2b} \end{pmatrix} \tag{37}$$

Так как индексы краевых задач (36), (37) равны нулю, то решение векторного уравнения (31) представляется в виде (27). В результате приходим к интегральному уравнению по области:

$$\rho - \mu_1 S_0\rho - \mu_2\overline{S}_0\overline{\rho} = A(\Phi + T_0\rho) + B(\overline{\Phi} + \overline{T}_0\overline{\rho}) + \mu_1\Phi' + \mu_2\overline{\Phi}' + N\,, \tag{38}$$

которое при численных расчетах реализуется по схеме последовательных приближений с геометрической скоростью сходимости:

$$\rho_{n+1} - \mu_1 S_0\rho_{n+1} - \mu_2\overline{S}_0\overline{\rho}_{n+1} = AT_0\rho_n + B\overline{T}_0\overline{\rho}_n + N_0\,, \quad N_0 = \mu_1\Phi' + \mu_2\overline{\Phi}' + A\Phi + B\overline{\Phi} + N$$

Поскольку матрицы G_1, G_2 – постоянны, то голоморфный вектор $\boldsymbol{\Phi}$ определяется в явном виде через интеграл Шварца [6]:

$$\Phi_j(\eta) = \frac{\overline{G}_j^{-1}}{2\pi i} \oint_{|\eta|=1} \frac{L_j(t)(t+\eta)}{t(t-\eta)} dt + iC_{0j}, \quad j = 1,2 \tag{39}$$

Произвольную действительную постоянную C_{0j} для односвязной области (без потери общности) можно положить равной нулю.

Для треугольных матриц μ_1, μ_2, A, B и матриц, близких к диагональным, в работе Е. А. Раенко [17] доказана однозначная разрешимость краевой задачи (31), (18). Для квазилинейной системы (31) ,(18) в работах В. Н. Монахова [6,13, 14] доказано существование хотя бы одного решения при условии ограничения на рост правой части (31). Ограничение на рост в правой части (31) вызвано существом дела, поскольку даже простейшее линейное уравнение с ограниченными коэффициентами

$$X_s = A(z)X + B(z)$$

может не иметь ограниченных решений в конечной области D [13].

В реальной ситуации упругие модули , объемные силы и объемные моменты ограничены. Для составных упругих тел упругие модули непрерывно-дифференцируемые функции координат, имеющие разрывы первого рода. Если в последних двух соотношениях (32) выбрать a ,b достаточно большими числами, например a=b^2 ($n_1 = \mu_{\min}(\delta+\varepsilon)^{-2}_{\max} n_2^2$), то нормы матриц A, B можно сделать сколь угодно малыми. Поэтому будут выполняться условия на рост [13, 16] для линейной системы уравнений (31).Тогда решение краевой задачи (31),(18) при выбранных a, b , согласно результатам работ [6, 13, 14], существует и единственно при μ_1, μ_2, A, B, $N \in L_{p>2}(K)$,$L \in SW_p^1$.

Если от переменных краевой задачи (31), (18) перейти к переменным краевой задачи (15), (18), то при условии $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \in W_p^1$, $Y \in L_p, \mathbf{G}, \mathbf{g} \in SW_p^{\ 1}$, $p > 2$, однозначно разрешима краевая задача (15), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1 Мартынов Н.И. Краевые задачи теории упругости неоднородной среды как краевые задачи обобщенного аналитического вектора // Математический журнал. – 2007. – № 3(25). – С. 69-77.

2 Алексеева Л.А., Мартынов Н.И., Федоров И.О. Применение квазиконформного отображения в задачах кручения неоднородных анизотропных тел // Математический журнал. – 2009. – Т. 9, № 3(33). – С. 14-18.

3 Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.
– М.: Наука, 1966. – 707 с.

4 Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

5 Боярский Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора // Annales Polonici Mathematicy. – 1966. – Vol. 17. – P. 281-320.

6 Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – М.: Наука, 1977. – 424 с.

7 Мартынов Н.И. Интегральные уравнения по области в статической теории упругости неоднородной среды // Доклады НАН РК. – 2010. – № 3. – С. 11-16.

8 Martynov N.I., Chuprasov A.A. Application of the quasianalytical vector theory to boundary-valuy problems of the elasticity theory non-homogeneous anisotropic medium // Materials of the II international research and practice conference «European Science and Technology». – Wiesbaden, Germany, 2012. – V01. – II. – P. 29-37.

9 Мартынов Н.И. Краевые задачи плоской моментной теории упругости неоднородной изотропной среды как краевые задачи квазианалитического вектора // Доклады НАН РК. – 2013. – № 2. – С. 22-31.

10 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 866 с.

11 Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.:
Машиностроение, 1986. – 336 с.

12 Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970. – 379 с.

13 Монахов В.Н. Нелинейные диффузионные процессы // Сиб. мат. журнал. – 2003. – Т. 44, № 5. – С. 1082-1097.

14 Антонцев С.Н., Монахов В.Н. Краевые задачи с разрывными граничными условиями для квазилинейных эллиптических систем $2m(m \geq 1)$ уравнений первого порядка // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 65-73.

15 Ашыралиев Ч., Монахов В.Н. Итерационный алгоритм решения двумерных сингулярных интегральных уравнений // Динамика сплошной среды. – 1991. – Вып. 101. – С. 21-29.

16 Ладыженская О.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 538 с.

17 Раенко Е.А. Краевые задачи для квази-голоморфного вектора // Динамика сплошной среды. – 2001. – Вып. 118. – С. 65-68.

REFERENCES

1 Martynov N.I. *Matematicheskij zhurnal*. **2007**. № 3(25). S. 69-77 (in Russ.).

2 Alekseeva L.A., Martynov N.I., Fedorov I.O. Matematicheskij zhurnal. **2009**. T.9. № 3(33). S. 14-18 (in Russ.).

3 Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti. M.: Naura, 1966. 707 s (in Russ.).

4 Vekua I.N. Obobwennye analiticheskie funkcii. *Nauka*, **1988**. 509 s (in Russ.).

5 Bojarskij B.V. *Annales Polonici Mathematicy*. **1966**. Vol. 17. P. 281-320 (in Russ.).

6 Monahov V.N. Kraevye zadachi so svobodnymi granicami dlja jellipticheskih sistem uravnenij. *Nauka*, **1977,** 424 s (in Russ.).

7 Martynov N.I. *Doklady NAN RK*. **2010**. № 3, C.11-16 (in Russ.).

8 Martynov N.I., Chuprasov A.A. Application of the quasianalytical vector theory to boundary-valuy problems of the elasticity theory non-homogeneous anisotropic medium. //Materials of the II international research and practice conference «European Science and Technology».Wiesbaden, Germany ,2012, Vol. II, P.29-37.

9 Martynov N.I. *Doklady NAN RK*. **2013**. № 2, C.22-32 (in Russ.).
10 Novackij V. Teorija uprugosti. M.: Mir, **1975**, 866s (in Russ.).
11 Chernyh K.F. Nelinejnaja teorija uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah. *Mashinostroenie*, **1986**, 336s (in Russ.).
12 Vekua N.P.Sistemy singuliarnyh integralnyh uravnenij i nekotorye granichnye zadachi. M.: Nauka, **1970**, 379s (in Russ.).
13 Monahov V.N. Sib.mat.Zhurnal., **2003**,T.44, №5, S.1082-1097 (in Russ.).
14 Antoncev S.N., Monahov V.N.Izv.SO AN SSSR,ser.tehn.nauk.,**1967**,T.8, , №2, S.65-73 (in Russ.).
15 Ashyraliev Ch., Monahov V.N. Dinamika sploshnoj sredy,**1991**,Vyp.101,S.21-29 (in Russ.).
16 Ladyzhenskaja O.A., Uralceva N.I. Linejnye i kvazilinejnye uravnenija jellihticheskogj tipa. M:Nauka, **1964,** 538 s (in Russ.).
17 Raenro E.A. Dinamika sploshnoj sredy, **2001**,Vyp.118,S.65-68 (in Russ.).

Резюме

Н. И. Мартынов

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

БІРТЕКТІ ЕМЕС ИЗОТРОПТЫҚ СЕРПІМДІ ОРТАНЫҢ КОССЕР
ЖАЛҒАНКОНТИНУУМЫНЫҢ ЖЕҢІЛДЕТІЛГЕН СҮЛБЕСІНІҢ ЖАЛПАҚ СТАТИКАЛЫҚ
ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Құрамды біртекті емес изотроптық серпімді ортаның жеңілдетілген Коссер сүлбесінің статикалық шеттік есептерінің жалпыланған шешімдерін бірден анықтауды мүмкін ететін облыста бір мәнді шешілетін интегралдық теңдеулер алынды.

Тірек сөздер: изотроптық дене, интегралдық теңдеулер, шеттік есеп, көрсеткіш.

Summary

N. I. Martynov

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan)

INTEGRAL EQUATIONS OF TWO-DIMENSIONAL STATICALLY
REGIONAL PROBLEMS SIMPLE MODEL OF PSEUDOCONTINIUM COSSERA
NONHOMOGENOUS ISOTROPIC ELASTICALLY MEDIUM

Simple are solved integrals equations in regional were obtained, which aloud at once defines conclusions solutions of statically regional problems of component nonhomogenous isotropic elastically mediums of simple model of pseudocontinium Cossera.

Keywords: isotropic body, the integrated equation, region problem, index.

Поступила 15.01.2014г.