УДК 539.3

*Н.И. МАРТЫНОВ, И.О. ФЕДОРОВ*

# ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА

Не традиционным подходом построено общее решение статических задач теории упругости через три гармонические функции.

Известно, что общее решение в форме Панковича-Нейбера пространственных статических задач однородного изотропного линейно-упругого тела при отсутствии объемных сил выражается через четыре гармонические функции. Если коэффициент Пуассона $\nu \neq \frac{1}{4}$, то общее решение можно представить через три гармонические функции [1-3].

В работе [4] дано представление общего решения статических задач через три гармонические функции в случае действия объемных сил и при любом коэффициенте Пуассона. Предварительно система уравнений статики упругого тела приводится к системе уравнений типа Мойсила-Теодореску, обобщающей условия Коши-Римана для аналитических функций на трехмерный случай [5]. Для несжимаемого материала в переменных давление-вихрь решение выражается через две гармонические функции.

В работах [6-8] показано, что общее решение уравнений движения сплошной однородной среды выражается через шесть функций $\varphi_i$, $i = 1 \div 6$, которые автоматически удовлетворяют уравнениям движения и условиям совместности деформаций. Функции $\varphi_i$ определяются из реологического уравнения состояния среды (в линейной теории упругости - обобщенный закон Гука) и соответствующими граничными и начальными условиями. Получен 51 равносильный вариант представления напряжений и смещений через шесть функций $\varphi_i$, $i = 1 \div 6$.

Близкий к работам [6-8] подход предложен в [9,10]. Суть его состоит в том, что реологический закон состояния среды, записанный через функции напряжений и кинематические характеристики среды является полным интегралом уравнений движения и совместности деформаций. Поэтому его разрешение эквивалентно решению соответствующих задач механики сплошной среды. Такой подход позволил двумерные краевые задачи статики неоднородного анизотропного линейно-упругого тела привести к краевым задачам обобщенного аналитического вектора, теория которого достаточно полно разработана и воспользоваться результатами этой теории.

В настоящей работе построено общее решение трехмерных статических задач теории упругости через три гармонические функции на основе результатов [6-8], что лишний раз подтверждает их правомерность.

**Общее решение.** В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ уравнения равновесия и совместности деформаций, как известно, имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{imp}\varepsilon_{jnq}\partial_{mn}e_{pq} = 0, \tag{2}$$

где компоненты симметричного тензора напряжений $\sigma_{ij}$ для изотропного однородного линейно-упругого тела подчинены закону Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda(e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \tag{3}$$

а компоненты вектора перемещений $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ связаны с компонентами тензора деформаций $e_{ij}$ соотношениями:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \qquad (i, j = 1,2,3). \tag{4}$$

Здесь $F_i$ - компоненты объемных сил; $\lambda, \mu$ - упругие параметры Ламе; $\delta_{ij}, \varepsilon_{imp}$ - символы Кронекера-Капелли и Леви-Чивита, соответственно. По немым индексам предполагается суммирование.

Согласно результатам [7], система (1)-(4) эквивалентны системе трех уравнений относительно трех функций $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$:

$$0 = \mu\partial_{kk}\varphi_4 + (\lambda+\mu)\theta + f_1$$
$$0 = \mu\partial_{kk}\varphi_5 + (\lambda+\mu)\theta + f_2 \quad , \qquad (5)$$
$$0 = \mu\partial_{kk}\varphi_6 + (\lambda+\mu)\theta + f_3$$

где

$$\theta = \partial_{11}\varphi_4 + \partial_{22}\varphi_5 + \partial_{33}\varphi_6. \qquad (5a)$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений выражаются через функции $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} + f_1 = \partial_{33}\varphi_2 + \partial_{22}\varphi_3, && \sigma_{12} = \mu\partial_{12}(\varphi_4 + \varphi_5)\\
&\sigma_{22} + f_2 = \partial_{33}\varphi_1 + \partial_{11}\varphi_3, && \sigma_{13} = \mu\partial_{13}(\varphi_4 + \varphi_6)\\
&\sigma_{33} + f_3 = \partial_{22}\varphi_1 + \partial_{11}\varphi_2, && \sigma_{23} = \mu\partial_{23}(\varphi_5 + \varphi_6)\\
&u_1 = \partial_1\varphi_4, \ u_2 = \partial_2\varphi_5, \ u_3 = \partial_3\varphi_6 && .(6)\\
&F_1 = \partial_1 f_1, \ F_2 = \partial_2 f_2, \ F_3 = \partial_3 f_3
\end{aligned}$$

Поскольку общий случай интегрирования неоднородной системы уравнений (5) с помощью объемных потенциалов сводятся к интегрированию однородной системы (5), то в дальнейшем объемные силы будем полагать равными нулю.

Интегрирование однородной системы (5) дает:

$$\varphi_4 - \varphi_5 = \chi_1, \ \varphi_4 - \varphi_6 = \chi_2, \ \varphi_5 - \varphi_6 = \chi_3, \qquad (7)$$

где $\chi_i$, $(i = 1,2,3)$- гармонические функции.

Из соотношений (7) следует, что

$$\chi_3 = \chi_2 - \chi_1$$

и тогда

$$\varphi_5 = \varphi_4 - \chi_1, \ \varphi_6 = \varphi_4 - \chi_2. \qquad (8)$$

Подставляя (8) в первое уравнение (5) с учетом (5а), получим:

$$\partial_{kk}\varphi_4 = e_0(\partial_{22}\chi_1 + \partial_{33}\chi_2), \ e_0 = \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}. \qquad (9)$$

Общее решение (9) имеет вид:

$$\varphi_4 = \chi_0 + \frac{e_0}{2}(x_2\chi_1 + x_3\chi_2). \qquad (10)$$

Здесь $\chi_0$- гармоническая функция.

Используя (10), по формулам (8) определяем $\varphi_5, \varphi_6$. Соотношения (6) позволяют определить компоненты вектора перемещений и тензора напряжений через три гармонические функции.

Таким образом, общее решение статических трехмерных задач теории упругости однородной изотропной среды выражается через три гармонические функции. Заметим, что если воспользоваться динамическим аналогом системы уравнений (5) для решения нестационарных задач [7], то общее решение этой системы выражается через три волновые функции, одна из которых описывает продольные волны, две других - поперечные. Скорости распространения волн определяются известными формулами Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Ю.Н.Работнов.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

2. *P.M. Naghdi, C.S. Hsu.* // J.Math.Mech., 1961, № 10, p.233-246.

3. *В. Новацкий.* Теория упругости. М.: ИЛ, 1975.

4. *Н.У. Умаров, Н.И. Мартынов, А. Г. Танирбергенов.* Об общем решении статики линейно-упругого тела.//Вестник КазНТУ, 2006,№3(53),с.131-133.

5. *А.И. Янушаускас.* Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами. Вильнюс, 1990.

6. *Н.И.Остросаблин.* Условия совместности деформаций и функции напряжений.// Прикл.мех. и тех.физика.1997,т.38,№5, с.136-146.

7. *Н.И.Остросаблин.* Функции напряжений и смещений для уравнений движения сплошной среды.//Сибирский журнал индустр. математики. 1999, т.2,№1, с.123-138.

8. *Н.И.Остросаблин.* Об условиях совместности малых деформаций и функциях напряжений.//Вестник НГУ, 2001,т.1,вып.1,с.67-77.

9. *Мартынов Н.И.* Приведение двумерных статических краевых задач упругой среды к краевым задачам обобщенного аналитического вектора. //Известия НАН РК, серия физико-математическая.2007.№1(251), с.52-59.

10. *Мартынов Н.И., Федоров И.О.* Краевые задачи обобщенного аналитического вектора в теории кручения неоднородных анизотропных тел. //Известия НАН РК, серия физико-математическая , 2007. №3,с.43-47.



**Резюме**

Тығыздылық теориясының статикалық есептерінің жалпы шешімі дәстүрлі емес әдіспен үш гармоникалық функциялар арқылы құрылды

**Summary**

Through three harmonious functions the common solution of the static problems of the elasticity theory has been constructed by non traditional approach.


*Поступила 5.03.08*