

(Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова, г. Алматы)

## **СВОБОДНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА**

### **Аннотация**

С помощью метода усреднения получены аналитические выражения для угловых координат сейсмического крутильного маятника при свободных нелинейных колебаниях. Анализ этих выражений и проведенное компьютерное моделирование позволили установить закономерности и особенности свободных колебаний сейсмического маятника.

**Ключевые слова:** нелинейные колебания, угловые координаты, маятник, компьютерное моделирование, землетрясение, прогноз.

**Кілт сөздер:** бейсызық тербелістер, бұрыштық координаттар, маятник, компьютерлік үлгілеу, жерсіл-кінісі, болжам.

**Keywords:** nonlinear vibration, angular coordinates, the pendulum, computer modeling, earthquake prediction.

**Введение.** Проблема прогноза землетрясений является одной из сложных и пока неразрешенных проблем, стоящих перед человечеством. Если долгосрочный прогноз землетрясений, основанный на геолого-геофизических и сейсмологических наблюдениях, дает более или менее удовлетворительные результаты [1, 2], то надежность среднесрочного прогноза по комплексу предвестников существенно ниже 0.5 и в редких случаях приближается к 0.5. Несмотря на огромное количество предвестников, ни один из них не дает точных оценок. В разных сейсмоактивных районах различные предвестники работают по-разному, давая большой разброс прогнозируемых параметров будущего землетрясения. Это связано как со сложностью исследования очага землетрясения, условий его зарождения и развития, так и с существенным влиянием помехообразующих факторов [3]. Ситуация с краткосрочным и оперативным прогнозом еще хуже: практически отсутствуют оценки надежности прогнозных предвестников.

С целью краткосрочного и оперативного прогноза землетрясений был разработан сейсмический маятник крутильного типа [4]. Наиболее глубокое исследование в этой области дано в работах группы Калинникова И. И. [4-8]. На основе качественной

физической модели с оценкой некоторых параметров колебаний маятника и сейсмических воздействий, с привлечением статистических методов, Калинин И. И. и другими сотрудниками Института Физики Земли была разработана методика оперативного прогноза землетрясений [5-9].

После Спитакского землетрясения 1988г., по предложению председателя Совета Министров СССР Н. И. Рыжкова и Первого Президента Республики Казахстана Н. А. Назарбаева в течение 1989-1993гг. на территории Казахстана была создана сеть станций из 9 полигонов наблюдения за сейсмической ситуацией на юго-востоке республики. Каждый полигон оснащен прибором «Алем», состоящим из двух крутильных маятников и других приборов, работающих в режиме реального времени. Опыт эксплуатации сети позволил собрать уникальный материал о готовящихся землетрясениях и показал, что прогнозные признаки могут проявляться от нескольких часов до нескольких суток перед землетрясением. Прогнозные признаки с надежностью не менее 70% выражаются в регулярных, как правило, ежедневных отклонениях показаний приборов от своего установившегося уровня, либо в пикообразном, либо в бухтообразном изменении углов закручивания маятника [10, 11].

Несмотря на определенные успехи в понимании связи поведения крутильного маятника с сейсмической обстановкой, установить какие-либо количественные соотношения не удавалось и, в первую очередь, из-за отсутствия достаточно строгой теории. Следует отметить, что существенный прогресс в компьютерных технологиях и численных методах не позволяет "перебрать" все варианты численного решения, а значит полно оценить влияние всех параметров колебания маятника и глубоко изучить природу явления. На эти вопросы в определенной мере способна ответить количественная теория, базирующаяся на приближенном аналитическом решении.

Такая аналитическая теория начала разрабатываться в Казахстане с конца 2003 года. Она позволила заложить основы теории колебаний сейсмического маятника [12]. С использованием метода усреднения были получены аналитические выражения для расчета всех угловых характеристик сейсмического маятника. Собственные затухающие нелинейные колебания, а также вынужденные нелинейные колебания маятника описаны в квадратурах. Соответствующие теоремы методов усреднения гарантируют близость точных и приближенных аналитических решений на достаточно большом отрезке времени [13-15]. Полученные результаты качественно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Тем не менее основы аналитической теории [12, 16] нуждаются в существенной переработке и выполнении расчетной части.

Ниже кратко приводится вывод основных расчетных характеристик и параметров свободных нелинейных колебаний. Проведено соответствующее компьютерное моделирование. Установлены закономерности и особенности свободных колебаний сейсмического маятника.

**Свободные колебания.** Колебания сейсмического маятника описываются тремя степенями свободы ( $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ) в модифицированной эйлеровой системе координат, где  $\psi$  – угол прецессии,  $\theta$  – угол нутации,  $\varphi$  – угол собственного закручивания [12, 16]. Там же выделен малый параметр  $\mu$ , который представляет собой отношение частот

линейных крутильных и нутационных колебаний. Для реального сейсмического маятника на станции "Медео"  $\mu = 0.0076$ . В целях упрощения исследования вводятся обобщенные угловые координаты  $(q_1, q_2, q_3)$  и соответствующие им обобщенные импульсы  $(P_1, P_2, P_3)$ .

$$\psi = F_1(q_1, q_2, q_3) = \arcsin\left(\frac{q_1\sqrt{1-\frac{q_1^2}{4}}}{Z_0}\cos q_3\right), \quad \theta = F_2(q_1, q_2, q_3) = \arcsin\left(q_1\sqrt{1-\frac{q_1^2}{4}}\sin q_3\right),$$

$$\cos\theta = \sqrt{\cos^2 q_3 + \left(1-\frac{q_1^2}{2}\right)\sin^2 q_3} = Z_0$$

(1)

$$\varphi = F_1(q_1, q_2, q_3) = q_2 + \arcsin\frac{\mu q_1^2 \sin(2q_3)}{3 \cdot 4 Z_0}$$

Рассмотрим свободные колебания высокочастотного модельного сейсмического маятника, когда силами трения можно пренебречь. Такое движение маятника в безразмерных переменных описывается системой уравнений [12, 16]:

$$\dot{q}_1 = \left(1 - \frac{\mu^2 q_1^2}{4}\right)P_1, \quad \dot{q}_2 = \frac{P_2}{a} - \frac{\mu}{2}P_3, \quad \dot{q}_3 = \frac{\mu^2}{4}(P_3 - 2P_2) + \frac{P_3}{q_1^2}$$

(2)

$$\dot{P}_1 + q_1 - \frac{P_3^2}{q_1^3} = \frac{\mu^2 q_1}{4}P_1^2, \quad \dot{P}_2 + \mu^2 a q_2 = 0, \quad \dot{P}_3 = 0$$

(3)

где  $a$  – расстояние от центра тяжести маятника до центра крепления галтели.

Из систем уравнений (2), (3) следует:

$$P_1 = \frac{\dot{q}_1}{\left(1 - \frac{\mu^2 q_1^2}{4}\right)}, \quad P_2 = a\left(\dot{q}_2 + \frac{\mu}{2}P_3\right), \quad P_3 = P_0 = const.$$

(4)

$$\ddot{q}_1 + q_1 - \frac{P_0^2}{q_1^3} = \frac{\mu^2}{4}\left(q_1^3 - q_1\dot{q}_1^2 - \frac{P_0^2}{q_1}\right), \quad \ddot{q}_2 + \mu^2 q_2 = 0,$$

(5)

Под линейно поляризованными понимаются такие колебания маятника, когда его нить остается в фиксированной плоскости. В этом случае порождающее решение (5) имеет вид [16, 20]:

$$q_1 = A_1 \cos(t + e_1), \quad q_2 = A_2 \cos(\mu t + e_2), \quad P_0 \equiv 0, \quad (6)$$

где амплитуды  $A_1, A_2$  и начальные фазы  $e_1, e_2$  определяются начальными условиями.

Рассмотрим общий случай незатухающих колебаний, когда  $P_3 = P_0 \neq 0$ . В этом случае  $q_1$  никогда не обращается в нуль и порождающее решение имеет вид [16, 20]:

$$q_1 = \sqrt{c + \Delta \cos \psi}, \quad \Delta = \sqrt{c^2 - P_0^2}, \quad c = \text{const}, \quad q_2 = A_2 \cos(\mu t + e_2), \quad P_3 = P_0 \neq 0 \quad (7)$$

Приведём первое уравнение (5) к стандартной форме. Его решение ищем методом вариации произвольных постоянных в виде:

$$q_1 = \sqrt{\alpha + \Delta \cos \psi}, \quad \Delta = \sqrt{\alpha^2 - P_0^2}, \quad \dot{q}_1 = -\frac{\Delta \sin \psi}{q_1}, \quad \psi = 2t - 2\beta, \quad (8)$$

где  $\alpha, \beta$  – неизвестные функции. Вид зависимостей (8) предполагает, что  $\alpha$  и  $\beta$  связаны между собой определённым соотношением. Дифференцируя первое соотношение (8) и учитывая второе соотношение (8), получим:

$$\dot{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha \cos \psi}{\Delta} + 2\Delta \beta'_\alpha \sin \psi \right) = 0, \quad (9)$$

отсюда

$$\beta'_\alpha = -\frac{(\Delta + \alpha \cos \psi)}{2\Delta^2 \sin \psi}. \quad (10)$$

Дифференцирование второго соотношения (8) с учётом (10) даёт:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2q_1^3} \left\{ \frac{\dot{\alpha} q_1^4}{\Delta \sin \psi} + 2q_1^2 \Delta \cos \psi + \Delta^2 \sin^2 \psi \right\}. \quad (11)$$

Подставим (8), (10) в первое уравнение (5), после несложных преобразований получим:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mu^2 \Delta^2 \sin 2\psi}{4}. \quad (12)$$

Тогда  $\dot{\beta}$  с учётом (10) будет иметь следующий вид:

$$\dot{\beta} = \frac{\mu^2}{4} \cos \psi (\Delta + \alpha \Delta \cos \psi) \cdot$$

(13)

Таким образом, первое уравнение (5) заменено эквивалентной системой уравнений (12), (13), записанной в стандартной форме. Если перейти к фазе колебаний с помощью последнего соотношения (8), то система (12), (13) запишется в виде:

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mu^2 \Delta^2 \sin 2\psi}{4}, \quad \dot{\psi} = 2 - \frac{\mu^2}{2} \cos \psi (\Delta + \alpha \cos \psi).$$

(14)

Решение системы уравнений (14) с помощью метода усреднения ищем в виде

$$\begin{aligned} A &= \bar{A} + \mu^2 u_1(\bar{A}, \bar{\psi}) + \mu^4 u_2(\bar{A}, \bar{\psi}) + \dots, \\ \psi &= \bar{\psi} + \mu^2 v_1(\bar{A}, \bar{\psi}) + \mu^4 v_2(\bar{A}, \bar{\psi}) + \dots, \end{aligned}$$

(15)

которая преобразует систему (14) в систему сравнения (16) :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= \mu^2 S_1(\bar{A}) + \mu^4 S_2(\bar{A}) + \dots, \\ \frac{d\bar{\psi}}{dt} &= 2 + \mu^2 G_1(\bar{A}) + \mu^4 G_2(\bar{A}) + \dots \end{aligned}$$

(16)

Здесь  $\bar{A}$ ,  $\bar{\psi}$  – неизвестные средние значения  $A$ ,  $\psi$ ; знак "–" означает среднее значение, функции  $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, S_1, S_2, \dots, G_1, G_2, \dots$  - неизвестные функции, подлежащие определению. Суть метода усреднения состоит в том, что первое уравнение (5) или эквивалентная ему система (14) с помощью определенной процедуры замены переменных представляется более простой системой уравнений, которая поддается решению или более глубокому анализу. При этом решения (14) и (16) должны отличаться между собой на сколь угодно малую величину на достаточно большом отрезке времени. Ограничимся первым приближением, которое в данном случае совпадает со вторым. В виду аналитичности правой части первого уравнения (5) и построенное решение (16) в абсолютной норме будут отличаться между собой на величину, не более чем  $O(\mu^2)$  на отрезке времени  $L/\mu^2$ , где  $L$  может быть достаточно большим числом [14].

Если произвести все необходимые операции метода усреднения, то в первом приближении (совпадающем со вторым приближением) получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{1}{2} \left\{ S_1(\bar{\alpha}) + \frac{\bar{\Delta}^2}{4} \sin 2\bar{\psi} \right\}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{1}{2} \left\{ G_1(\bar{\alpha}) + \frac{\Delta}{2} \cos \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} (1 + \cos 2\bar{\psi}) \right\},$$

(17)

где  $\bar{\Delta} = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - P_0^2}$ , а усреднённая фаза  $\bar{\psi}$  удовлетворяет второму уравнению (16).

Выполняя процедуру усреднения, определяем  $S_1(\bar{\alpha})$ ,  $G_1(\bar{\alpha})$ :

$$S_1(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\Delta}^2}{4} \sin 2\bar{\psi} d\bar{\psi} = 0, \quad G_1(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\bar{\Delta}}{2} \cos \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} (1 + \cos 2\bar{\psi}) \right\} d\bar{\psi} = -\frac{\bar{\alpha}}{4}.$$

(18)

При выполнении процедуры усреднения по времени  $\bar{\alpha}$ ,  $P_0$ ,  $\bar{\Delta}$  считаются постоянными [14]. Подставив (18) в (17) и выполняя интегрирование, имеем:

$$u_1(\bar{\alpha}, \bar{\psi}) = \frac{\bar{\Delta}^2}{16} \cos 2\bar{\psi}, \quad v_1(\bar{\alpha}, \bar{\psi}) = -\frac{1}{4} \left\{ \bar{\Delta} \sin \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} \sin 2\bar{\psi} \right\}.$$

(19)

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{\mu^2}{16} \bar{\Delta}^2 \cos 2\bar{\psi}, \quad \psi = \bar{\psi} - \frac{\mu^2}{4} \left\{ \bar{\Delta} \sin \bar{\psi} + \frac{\bar{\alpha}}{4} \sin 2\bar{\psi} \right\}.$$

(20)

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{\psi}}{dt} = 2 - \frac{\mu^2 \bar{\alpha}}{4}.$$

(21)

В соотношениях (19) при интегрировании (17) учтено, что  $\varphi_1(\bar{\alpha}) = \psi_1(\bar{\alpha}) = 0$ . Это условие обеспечивает тригонометрическую форму преобразования Крылова–Боголюбова (15). Из соотношений (21) следует, что

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 = \text{const}, \quad \bar{\psi} = \left( 2 - \frac{\mu^2 \bar{\alpha}_0}{4} \right) t + \bar{\psi}_0.$$

(22)

Определим  $\bar{\alpha}_0$  и  $\bar{\psi}_0$ :

$$\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 + \frac{\mu^2}{16} \bar{\Delta}_0^2 \cos 2\bar{\psi}_0, \quad \psi_0 = \bar{\psi}_0 - \frac{\mu^2}{4} \left\{ \bar{\Delta}_0 \sin \bar{\psi}_0 + \frac{\bar{\alpha}_0}{4} \sin 2\bar{\psi}_0 \right\}, \quad \bar{\Delta}_0 = \sqrt{\bar{\alpha}_0^2 - P_0^2},$$

(23)

где начальная амплитуда  $\alpha_0$  и фаза  $\psi_0$  определяются из начальных условий:

$$q_{10}^2 = \alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_0, \quad \dot{q}_{10} q_{10} = -\Delta_{00} \sin \psi_0, \quad \Delta_{00} = \sqrt{\alpha_0^2 - P_0^2}.$$

(24)

Представим  $\bar{\alpha}_0$  и  $\bar{\psi}_0$  в виде:

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_{01} + \mu^2 \bar{\alpha}_{02}, \quad \bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_{01} + \mu^2 \bar{\psi}_{02}.$$

(25)

Подставив (25) в (23) и разложив в ряд по малому параметру  $\mu$ , приравняем коэффициенты при  $\mu^0$ ,  $\mu^2$ . Получим систему четырёх линейных уравнений относительно  $\bar{\alpha}_{01}$ ,  $\bar{\alpha}_{02}$ ,  $\bar{\psi}_{01}$ ,  $\bar{\psi}_{02}$ , решение которой будет:

$$\bar{\alpha}_{01} = \alpha_0, \quad \bar{\psi}_{01} = \psi_0, \quad \bar{\alpha}_{02} = -\frac{\Delta_{00}^2}{16} \cos 2\psi_0, \quad \bar{\psi}_{02} = \frac{1}{4} \left\{ \Delta_{00} \sin \psi_0 + \frac{\alpha_0}{4} \sin 2\psi_0 \right\}. \quad (26)$$

Тогда

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 - \frac{\mu^2}{16} \Delta_{00}^2 \cos 2\psi_0, \quad \bar{\psi}_0 = \psi_0 + \frac{\mu^2}{4} \left\{ \Delta_{00} \sin \psi_0 + \frac{\alpha_0}{4} \sin 2\psi_0 \right\}. \quad (27)$$

Обозначим

$$\omega_{II} = 2 - \frac{\mu^2}{4} \left( \alpha_0 - \frac{\mu^2}{16} \Delta_{00}^2 \cos 2\psi_0 \right), \quad \psi_{II} = \omega_{II} t + \psi_0. \quad (28)$$

Используя (20), (24), (27), (28) и пренебрегая членами четвёртого порядка малости по  $\mu$ , получим:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\mu^2}{16} \Delta_{00}^2 [\cos 2\psi_{II} - \cos 2\psi_0], \quad \psi = \psi_{II} + \frac{\mu^2}{16} \{ 4\Delta_{00} (\sin \psi_0 - \sin \psi_{II}) + \alpha_0 (\sin 2\psi_0 - \sin 2\psi_{II}) \}. \quad (29)$$

Заметим, что при выводе (29) конструирование операторов сглаживания проведено с использованием операторов усреднения при постоянных возмущениях. Подобные операторы учитывают зависимость порождающего решения от времени и более эффективны, чем обыкновенные операторы сглаживания [14].

При  $P_0 \neq 0$ , используя (29) и (7), определим  $q_1$ :

$$q_1^2 = (\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}) + \frac{\mu^2 \Delta_{00}}{16} \left\{ 2\Delta_{00} (\sin \psi_{II} - \sin \psi_0)^2 + \alpha_0 (\cos \psi_{II} - \cos(\psi_{II} - 2\psi_0)) \right\},$$

$$q_1 = \sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}} + \frac{\mu^2 \Delta_{00} \left\{ 2\Delta_{00} (\sin \psi_{II} - \sin \psi_0)^2 + \alpha_0 (\cos \psi_{II} - \cos(\psi_{II} - 2\psi_0)) \right\}}{32\sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}}} \quad (30)$$

Заметим, что время отсчёта можно сдвинуть так, чтобы начальная фаза  $\psi_0 \equiv 0$ . Тогда выражения (30) упрощаются и равны:

$$q_1^2 = (\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}) + \frac{\mu^2 \Delta_{00}^2}{8} \sin^2 \psi_{II}, \quad \psi_{II} = \omega_{II} t,$$

$$q_1 = \sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}} + \frac{\mu^2 \Delta_{00}^2 \sin^2 \psi_{II}}{16 \sqrt{\alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II}}}.$$

(31)

Эти соотношения показывают появление "обертонов".

Теперь подставим первое соотношение (31) и второе соотношение (4) в третье уравнение (2), учтём второе соотношение (6) и проведём интегрирование:

$$q_3(t) = q_3(0) + \frac{\mu^2}{4} [(1 - \mu a) P_0 t + 2a A_2 (\cos e_2 - \cos(\mu t + e_2))] + J_0,$$

(32)

где

$$J_0(\psi_{II}) = \frac{1}{\omega_{II}} \int_0^{\psi_{II}} \frac{P_0 d\psi_{II}}{\left( \alpha_0 + \Delta_{00} \cos \psi_{II} + \frac{\mu^2 \Delta_{00}^2}{8} \sin^2 \psi_{II} \right)}.$$

(33)

Вычисляя интеграл (33), окончательно получим [12]:

$$q_3(t) = q_3(0) + \frac{\mu^2 a A_2}{2} \{ \cos e_2 - \cos(\mu t + e_2) \} + \left[ 1 + \frac{\mu^2}{8} (3p_0 - \alpha_0) \right] t - \arctg \left\{ \frac{\chi \sin \psi_{II}}{1 + \cos \psi_{II}} \right\}.$$

(34)

Колебания сейсмического маятника характеризуются малыми углами нутации и кручения [10-12]. Разлагая третье соотношение (1) в безразмерных переменных по малому параметру  $\mu$ , получим:

$$\varphi = q_2 + \frac{\mu}{4} q_1^2 \sin 2q_3 + \frac{\mu^3 q_1^4}{8} \sin^2 q_3 \sin 2q_3.$$

(35)

Теперь, подставив четвертое соотношение (7), (31), (32) в (35), получим зависимость изменения угла закручивания от времени. Не выписывая в явном виде эту зависимость, можно утверждать, что на медленные линейные крутильные колебания накладываются колебания в виде дрожаний, которые сложным образом зависят от комбинационных частот. Эти комбинационные частоты определяются частотами  $\omega_{II}$ ,  $\omega_{III}$ , где

$$\omega_{III} = 1 + \frac{\mu^2}{8} (3p_0 - \alpha_0).$$

(36)

Для линейно поляризованных колебаний ( $P_0 = 0$ ,  $\chi = 1$ ,  $\alpha_0 = \Delta_{00}$ ) второе соотношение (31), (35) и (34) переходят в

$$q_1(t) = A_0 \left( 1 + \frac{\mu^2}{64} A_0^2 \right) \cos \psi_1 - \frac{\mu^2}{64} A_0^3 \cos 3\psi_1, \quad \psi_1 = \omega_1 t, \quad \omega_1 = 1 - \frac{\mu^2 A_0^2}{16}$$

$$\varphi = q_2 + \frac{q_1^2}{4} \sin 2q_3(0) + \frac{q_1^4}{8} \sin 2q_3(0) \sin^2 q_3(0) + \dots$$

(37)

$$q_3(t) = q_3(0) + \frac{\mu^2 a A_2}{2} \{ \cos e_2 - \cos(\mu t + e_2) \}.$$

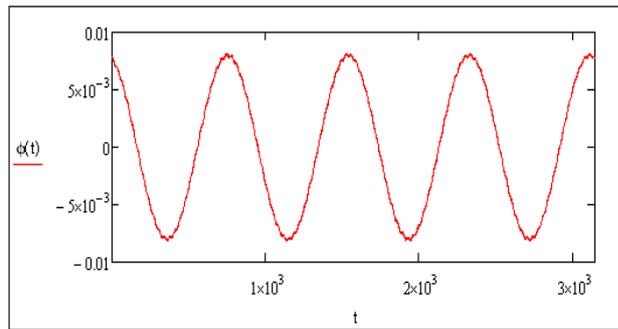
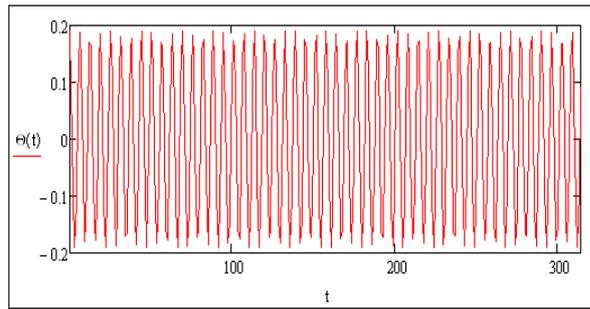
Заметим, что частота  $\omega_{II}$  почти в два раза больше частоты  $\omega_I$ . Для обоих вариантов характерно появление "обертонов".

### Результаты численных расчетов

На рисунках 1–5 в безразмерных координатах приведены графики свободных колебаний угловых координат  $\theta, \varphi$  для общего случая колебаний.

Графики 1–5 представляют свободные нутационные и крутильные колебания маятника для общего случая колебаний, когда  $q_1(t) \neq 0$ . Отчетливо прослеживается тенденция влияния начальных условий и обертонов на свободные колебания, что характерно для нелинейных колебаний.

Графики дают представление о влиянии уменьшения начальной амплитуды  $A_{20}$  на нутационные и крутильные колебания и влиянии дрожаний на крутильные колебания. Так, из рисунков 1а, 2а, 3а, 4а следует, что уменьшение  $A_{20}$  никак не влияет на нутационные колебания маятника. Из рисунков 1б, 2б, 3б, 4б следует, что с уменьшением  $A_{20}$  увеличивается влияние нутационных «дрожаний» на крутильные колебания.

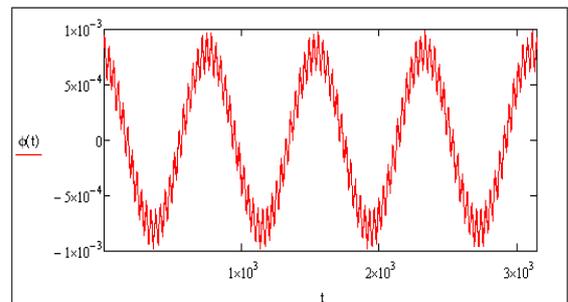
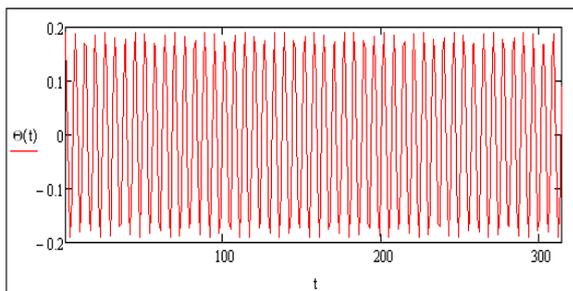


*a*

*б*

$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.008 ; P_0 = 0.05$$

Рисунок 1 – Графики зависимостей угловых координат  $\theta, \varphi$  от времени (а, б)

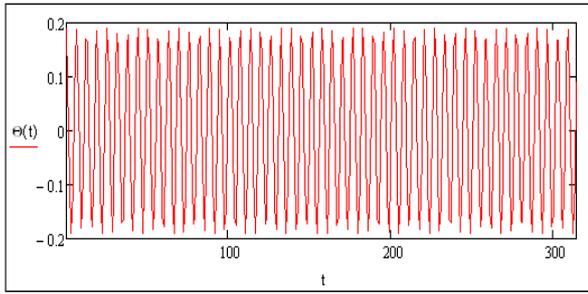


*a*

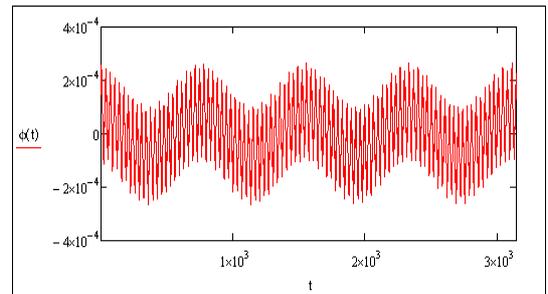
*б*

$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.0008 ; P_0 = 0.05$$

Рисунок 2 – Графики зависимостей угловых координат  $\theta, \varphi$  от времени (а, б)



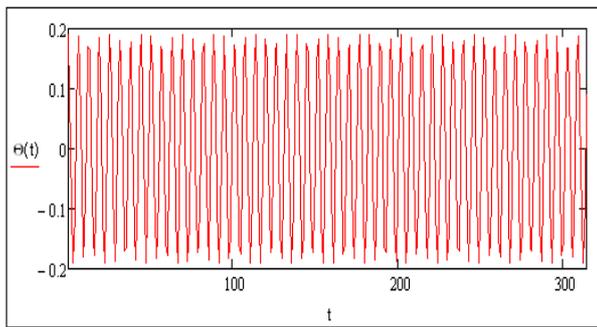
*a*



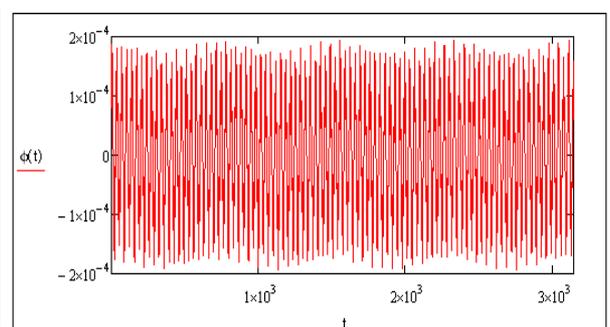
*б*

$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.00008 ; P_0 = 0.05$$

Рисунок 3 – Графики зависимостей угловых координат  $\theta, \varphi$  от времени (а, б)



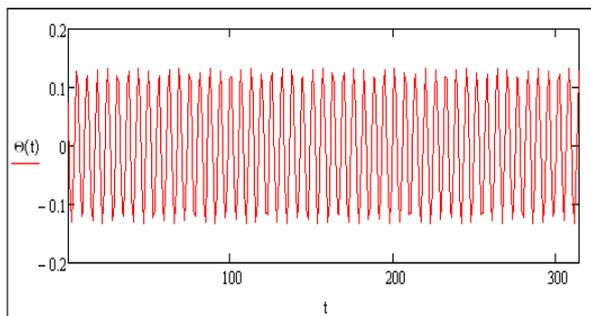
*a*



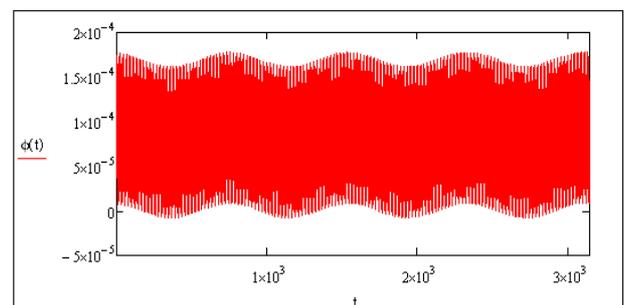
*б*

$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.000008 ; P_0 = 0.05$$

Рисунок 4 – Графики зависимостей угловых координат  $\theta, \varphi$  от времени (а, б)



*a*



*б*

$$\mu = 8 \cdot 10^{-3} ; \alpha = 0.06 ; q_{30} = \frac{\pi}{8} ; e_2 = \frac{\pi}{12} ; a = 0.8 ; A_2 = 0.000008 ; P_0 = 0.00005$$

Рисунок 5 – Графики зависимостей угловых координат  $\theta, \varphi$  от времени (а, б)

При малой начальной амплитуде  $A_{20}$  (рисунок 4 б) практически теряется зависимость крутильных колебаний от частоты  $\mu$ , и маятник закручивается с частотой нутационных колебаний.

Сопоставление графиков 4а, 4б с 5а, 5б дает представление о влиянии начального импульса  $P_0$  при неизменно малой амплитуде  $A_{20}$  на угловые координаты. Он влияет как на нутационные колебания, так и на крутильные, оставляя последние «модулированными».

Для близких к линейно поляризованным колебаний, как показали расчеты, общая картина колебаний остается примерно такой же, но начальный импульс  $P_0$  не влияет на параметры колебаний, так как он равен нулю.

Приведенные выше расчетные зависимости свободных колебаний количественно подтверждают гипотезу И. И. Калининкова [7] о влиянии нутационных колебаний сейсмического крутильного маятника на его крутильные колебания и устанавливают между ними аналитическую связь.

*Работа выполнена в рамках грантового финансирования "Фундаментальные исследования в области естественных наук" № 0502/ГФ.*

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Завьялов А.Д. Среднесрочный прогноз землетрясений. Основы, методика, реализация. – М.: Наука, 2006. – 254 с.
- 2 Зубков С.И. Предвестники землетрясений. – М.: ОИФЗ РАН, 2002. – 140 с.
- 3 Любушин А.А. Анализ данных геофизического и экологического мониторинга. – М.: Наука, 2007. – 278 с.
- 4 Калининков И.И. Консервативные системы для геофизических исследований. – М.: ИФЗ СССР, 1983. – 178 с.
- 5 Зенков В.С., Калининков И.И., Нюнин М.И., Нюнина Н.А., Синякова В.Ф. Эквивалентная шумовая температура в лаборатории и землетрясения // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 239, № 1. – С. 74-76.
- 6 Зенков В.С., Калининков И.И., Нюнин М.И. Оперативный прогноз сильных землетрясений // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 254, № 2. – С. 325-327.
- 7 Калининков И.И. Консервативные системы для геофизических исследований. – М.: ИФЗ СССР, 1983. – 178 с.

8 Калинин И.И. Горизонтальные крутильные весы – сейсмоприемник с многолепестковой диаграммой направленности // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 317, № 4. – С. 868-872.

9 Калинин И.И., Матюнин В.П., Ньюнина Н.А., Гетманская В.В. Оперативный прогноз землетрясений в телесеismicческой зоне – реальность // Доклады РАН. – 1992. – Т. 323, № 6. – С. 1068-1071.

10 Отчет НИР НПК «Прогноз». – Алматы: ГУ «Казселезащита», 1994–1999. – 168 с.

11 Отчет о научной деятельности Центральной лаборатории по прогнозу землетрясений НПК «Прогноз». – 2008. – 169 с.

12 Мартынов Н.И. Введение в теорию колебаний сейсмического маятника. – Алматы: ЛЕМ, 2005. – 162 с.

13 Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.

14 Гребенников Е.А., Митропольский Ю.А. Метод усреднения в исследованиях резонансных систем. – М.: Наука, 1992. – 221 с.

15 Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. – 1962. – Т. 17, № 6. – С. 3-126.

16 Мартынов Н.И. Собственные нелинейные колебания сейсмического маятника // Вестник НАН РК. – 2006. – № 5. – С. 48-51.

## REFERENCES

1 Zav'jalov A.D. Srednesrochnyj prognoz zemletrjasenij. Osnovy, metodika, realizacija. *Nauka*, **2006**, 254 p. (in Russ.).

2 Zubkov S.I. Predvestniki zemletrjasenij. *OIFZ RAN*, **2002**, 140 p. (in Russ.)

3 Ljubushin A.A. Analiz dannyh geofizicheskogo i ekologicheskogo monitoringa. *Nauka*, **2007**, 278 p. (in Russ.).

4 Kalinnikov I.I. Konservativnye sistemy dlja geofizicheskikh issledovanij. *IFZ SSSR*, **1983**, 178 p. (in Russ.).

5 Zenkov V.S., Kalinnikov I.I., Njunin M.I., Njunina N.A., Sinjakova V.F. Ekvivalentnaja shumovaja temperatura v laboratorii i zemletrjasenija *Doklady AN SSSR*, **1978**, Vol. 239, №1, P. 74-76 (in Russ.).

6 Zenkov V.S., Kalinnikov I.I., Njunin M.I. Operativnyj prognoz sil'nyh zemletrjasenij *Doklady AN SSSR*, **1980**, Vol. 254, №2, P. 325-327 (in Russ.).

7 Kalinnikov I.I. Konservativnye sistemy dlja geofizicheskikh issledovanij. *IFZ SSSR*, **1983**, 178 p. (in Russ.).

8 Kalinnikov I.I. Gorizontal'nye krutil'nye vesy - seismopriemnik s mnogolepestkovoj diagrammoj napravlenosti *Doklady AN SSSR*, **1991**, Vol. 317, №4, P. 868-872 (in Russ.).

9 Kalinnikov I.I., Matjunin V.P., Njunina N.A., Getmanskaja V.V. Operativnyj prognoz zemletrjasenij v telesejsmicheskoj zone - real'nost' *Doklady RAN*, **1992**, Vol.323, №6, P. 1068-1071 (in Russ.).

10 Report NIR NPK «Prognoz» GU «Kazselezashhita», **1994-1999**, 168 p. (in Russ.).

11 Otchet o nauchnoj dejatel'nosti Central'noj laboratorii po prognozu zemletrjasenij NPK «Prognoz», **2008**. 169 p. (in Russ.).

12 Martynov N.I. Vvedenie v teoriju kolebanij sejsmicheskogo majatnika. *LEM*, **2005**, 162 p. (in Russ.).

13 Bogoljubov N.N., Mitropol'skij Ju.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. *Nauka*, **1974**, 503 p. (in Russ.).

14 Grebennikov E.A., Mitropol'skij Ju.A. Metod usrednenija v issledovanijah rezonansnyh sistem. *Nauka*, **1992**, 221 p. (in Russ.).

15 Volosov V.M. Usrednenie v sistemah obyknovennyh differencial'nyh uravnenij *UMN*, **1962**, Vol. 17, № 6, P. 3 - 126 (in Russ.).

16 Martynov N.I. Sobstvennye nelinejnye kolebanija sejsmicheskogo majatnika *Vestnik NAN RK*, **2006**, № 5, P. 48-51 (in Russ.).

## Резюме

*Н. И. Мартынов, М. А. Рамазанова, А. А. Чупрасов*

(Ө. А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қ.)

СЕЙСМИКАЛЫҚ БҰРАЛМАЛЫ МАЯТНИКТИҢ

БЕЙСЫЗЫҚ ЕРКІН ТЕРБЕЛІСТЕРІ

Орталау әдісінің көмегімен сейсмикалық бұралмалы маятниктің бейсызық еркін тербелістері кезіндегі бұрыштық координаттары үшін талдау өрнектер алынған. Осы өрнектердің талдауы мен жүргізілген компьютерлік үлгілеу сейсмикалық маятниктің еркін тербелістерінің заңдылықтары мен ерекшеліктерін тағайындауға мүмкіндік берді.

**Кілт сөздер:** бейсызық тербелістер, бұрыштық координаттар, маятник, компьютерлік үлгілеу, жерсіл-кінісі, болжам.

## Summary

*N. I. Martynov, M. A. Ramazanova, A. A. Chuprassov*

(Mechanics and Engineering Institute named Academician U.A. Dzholdasbekova, Almaty)

### FREE NONLINEAR OSCILLATIONS OF THE SEISMIC TORSIONAL PENDULUM

Analytical expressions for angular coordinates of a seismic torsional pendulum are received at free nonlinear oscillations using averaging method. The analysis of these expressions and the carried-out computer modeling allowed to determine consistent patterns and the features of seismic pendulum free oscillations.

**Keywords:** nonlinear vibration, angular coordinates, the pendulum, computer modeling, earthquake prediction.

*Поступила 24.01.2013г*