Н.И. МАРТЫНОВ

(РГП «Институт математики и математического моделирования», г. Алматы)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ КАК КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

Аннотация

Краевые задачи плоской моментной теории упругости неоднородной изотропной среды приведены к краевым задачам Римана-Гильберта для квазианалитического вектора. Выведены однозначно разрешимые интегральные уравнения по области, позволяющие сразу определять обобщенные решения для составных упругих сред.

Ключевые слова: изотропное тело, интегральные уравнения, краевая задача, индекс.

Кілт сөздер: изотроптық дене, интегралдық теңдеу, шеткі есеп, көрсеткіш.

Keywords: Isotropic body, the integrated equations, regional problem, index.

Введение. Краевые задачи плоской статической теории упругости неоднородных анизотропных сред описываются линейной эллиптической системой уравнений с переменными коэффициентами. Теория решения таких систем разработана достаточно полно. В ней особое место занимает теория обобщенного аналитического вектора [1-3] или квазианалитического вектора [4,5], которая представляет собой теорию решения эллиптических систем первого порядка на плоскости. Решения этих систем в общем случае являются обобщенными решениями в смысле Соболева, а по своим топологическим свойствам близки к аналитическим функциям. Поэтому теория обобщенного аналитического вектора обобщает аппарат аналитических функций, используемых в методе Н.И. Мусхелишвили [6] и его модификациях для решения плоских статических краевых задач однородной изотропной упругой среды.

В работах [7-9] двумерные краевые задачи статики и задачи кручения теории упругости неоднородных анизотропных сред приведены к краевой задаче Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора. Это позволяет задействовать уже разработанный аппарат [2,3], сводящий краевую задачу Римана-Гильберта для обобщенного аналитического вектора к эквивалентной системе контурных сингулярных интегральных уравнений. Метод контурных сингулярных интегральных уравнений универсален и его целесообразно использовать при решении задач с многосвязными областями, при решении некоторых частных задач, а также в теоретических исследованиях.

Для решения практически важных задач метод контурных интегральных уравнений не очень удобен [2], так как связан с трудоемкими дополнительными процедурами: приведением системы уравнений к каноническому виду, построением фундаментальных решений, резольвентных ядер и общего решения.

Поэтому естественно встает вопрос о том, нельзя ли с помощью интегральных операторов по области, минуя все промежуточные звенья, решать краевые задачи. Оказывается, что во многих случаях это возможно. Теория, базирующая на таком подходе, называется теорией квазианалитического вектора [4]. При этом отпадают многие требования на гладкость упругих параметров, расширяется класс изучаемых уравнений и краевых задач.

В работах [9-11] в случае односвязной области выведены однозначно разрешимые интегральные уравнения по области для первой и второй краевых задач статической теории упругости неоднородной анизотропной среды, позволяющие сразу определять обобщенные решения для составных упругих сред, с изменяющейся по области анизотропией. Для однородного анизотропного материала решения краевых задач получены в замкнутом виде, т.е. выражаются через контурные интегралы и интегралы по области.

В настоящем исследовании результаты работ [9-11] с определенными модификациями перенесены на плоские краевые задачи моментной теории неоднородной изотропной среды.

1. Разрешающие уравнения. В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ в поле объемных сил $f=(f_1,f_2,0)$ и объемных моментов $\mathbf{F}=(0,0,F_3)$ при условии плоской деформации рассмотрим равновесие изотропного неоднородного линейно-упругого тела, занимающего односвязную область D с границей Γ. Плоское деформируемое состояние описывается векторами перемещений $\mathbf{u}=(u_1,u_2,0)$ и углами поворота $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega_3)$. Компоненты несимметричных тензоров напряжений σ_{ij} и моментных напряжений μ_{ij} (i,j=1,2,3),

$$\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=\sigma_{32}=0,\mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{12}=\mu_{21}=0.$$

Деформируемое состояние характеризуется несимметричным тензором деформаций γ_{ij} и тензором изгиба - кручения $\varkappa_{ij}$, причем [12,13]:

$$\gamma_{11}=u_{1,1},\ \gamma_{22}=u_{2,2},\ \gamma_{12}=u_{2,1}-\omega_3,\gamma_{21}=u_{1,2}+\omega_3 \tag{1}$$

$$\varkappa_{13}=\omega_{3,1},\varkappa_{23}=\omega_{3,2}\ ,$$

где запятая после индекса означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате. Из (1) следуют условия совместности деформаций [12]:

$$\gamma_{22,11}+\gamma_{11,22}=\gamma_{12,12}+\gamma_{21,12}$$

$$\gamma_{12,22}-\gamma_{21,11}=\gamma_{22,12}-\gamma_{11,12}-(\varkappa_{13,1}+\varkappa_{23,2}) \tag{2}$$

$$\varkappa_{23,1}=\varkappa_{13,2}$$

Закон Гука, связывающий деформационные и силовые характеристики среды, имеет вид [12]:

$$\sigma_{11}=2\mu\gamma_{11}+\lambda\gamma_{кк},\sigma_{22}=2\mu\gamma_{22}+\lambda\gamma_{кк},\sigma_{33}=\lambda\gamma_{kk},\gamma_{kk}=\gamma_{11}+\gamma_{22}$$

$$\sigma_{12}=(\mu+\alpha)\gamma_{12}+(\mu-\alpha)\gamma_{21},\sigma_{21}=(\mu+\alpha)\gamma_{21}+(\mu-\alpha)\gamma_{12}, \tag{3}$$

$$\mu_{13}=(\delta+\varepsilon)\varkappa_{13},\ \mu_{23}=(\delta+\varepsilon)\varkappa_{23},\ \mu_{31}=(\delta-\varepsilon)\varkappa_{13},\mu_{32}=(\delta-\varepsilon)\varkappa_{23},$$

где $\mu,\varepsilon,\delta,\alpha,\lambda$ – упругие модули, зависящие от координат (x_1,x_2). Для плоского деформированного состояния имеем три уравнения равновесия:

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{21,2}+f_1=0,\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+f_2=0,$$

$$(\sigma_{12}-\sigma_{21})+\mu_{13,1}+\mu_{23,2}+F_3=0 \tag{4}$$

Перейдем на плоскость комплексных переменных и введем комплексные операторы:

$$z=x_1+ix_2,\quad \bar{z}\equiv s=x_1-ix_2,\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\ \frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{5}$$

где i – мнимая единица $(i^2=-1)$. Введем комплексные компоненты тензоров напряжений, деформаций и перемещений [14] , а также следы от объемных сил и моментов:

$$T_1=(\sigma_{11}+\sigma_{22})+i(\sigma_{12}-\sigma_{21}),\ T_2=(\sigma_{11}-\sigma_{22})+i(\sigma_{12}+\sigma_{21}),T_5=\sigma_{33}$$

$$\gamma_1=\tfrac{1}{2}\big((\gamma_{11}+\gamma_{22})+i(\gamma_{12}-\gamma_{21})\big),\gamma_2=\tfrac{1}{2}\big((\gamma_{11}-\gamma_{22})+i(\gamma_{12}+\gamma_{21})\big), \tag{6}$$

$$M=\mu_{13}+i\mu_{23},\varkappa=\varkappa_{13}+i\varkappa_{23},W=W_1+iW_2$$

$$\theta_1=\int_{x0_1}^{x_1}f_1dx_1,\ \theta_2=\int_{x0_2}^{x_2}f_2dx_2,m=\int_{x0_1}^{x_1}F_3dx_1$$

Тогда соотношения (1)-(4) запишутся в виде:

$$\gamma_1 = W_z - i\omega, \gamma_2 = W_s, (\omega = \omega_3) \tag{7}$$

$$(\gamma_{1zs} + \bar{\gamma}_{1zs}) = \bar{\gamma}_{2ss} + \gamma_{2zz}, i(\gamma_{1zs} - \bar{\gamma}_{1zs}) - 2\omega_{zs} = i(\gamma_{2zz} - \bar{\gamma}_{2ss}), \varkappa_z = \bar{\varkappa}_s \tag{8}$$

$$T_1 = 2(\lambda + \mu + \alpha)W_z + 2(\lambda + \mu - \alpha)\overline{W_s} - 4i\alpha\omega, T_2 = 4\mu W_s, M = 2(\delta + \varepsilon)\omega_s \tag{9}$$

$$(T_1 + \theta_1 + \theta_2)_s + (T_2 + \theta_1 - \theta_2)_z = 0,$$

$$(M + m)_z + (\overline{M + m})_z - \frac{i}{2}(T_1 - \bar{T}_1) = 0 \tag{10}$$

Индексы z, s означают соответствующие производные (5).Введем функции напряжений U, ψ:

$$T_1 + \theta_1 + \theta_2 = 4U_z, T_2 + \theta_1 - \theta_2 = 4U_s, M - 2iU + m = 2i\psi_s \tag{11}$$

Тогда уравнения равновесия (10) удовлетворяются автоматически, а закон Гука запишется в виде:

$$U_z = p_1 W_z + p_2 \bar{W}_s - i\alpha\omega + g_1,$$

$$U_s + \mu W_s + g_2 = 0, \tag{12}$$

$$(\delta + \varepsilon)\omega_s - iU + \frac{m}{2} = i\psi_s,$$

где $p_1 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \alpha), p_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \alpha), g_1 = \frac{1}{4}(\theta_1 + \theta_2), g_2 = \frac{1}{4}(\theta_1 - \theta_2)$

Исключая из (12) перемещения, получим уравнение совместности деформаций в «терминах» функций напряжений:

$$\left\{\frac{U_z + \bar{U}_s - 2g_1}{\lambda + \mu}\right\}_{zs} + \left\{\frac{\bar{U}_z + g_2}{\mu}\right\}_{ss} + \left\{\frac{U_s + g_2}{\mu}\right\}_{zz} = 0$$

$$\left\{\frac{U_z - \bar{U}_s}{\alpha}\right\}_{zs} + \left\{\frac{U_S + g_2}{\mu}\right\}_{zz} = \left\{\frac{\bar{U}_z + g_2}{\mu}\right\}_{ss} + \left\{\frac{2(\psi_s + U + \frac{i}{2}m)}{\delta + \varepsilon}\right\}_z \tag{13}$$

$$\left\{\frac{\psi_z + U + \frac{i}{2}m}{\delta + \varepsilon}\right\}_z + \left\{\frac{\psi_s + \bar{U} - \frac{i}{2}m}{\delta + \varepsilon}\right\}_s = 0$$

Исключая из (12) функции напряжений, получим уравнение равновесия (10) в перемещениях:

$$\{p_1 W_z + p_2 \overline{W}_s - i\alpha\omega + g_1\}_s + \{\mu \overline{W}_s + g_2\}_z = 0 \quad (14)$$

$$\left\{(\delta+\varepsilon)\omega_s + \frac{m}{2}\right\}_z + \left\{(\delta+\varepsilon)\omega_z + \frac{m}{2}\right\}_s - i\alpha(\overline{W}_s - W_z) + 2\alpha\omega = 0$$

Таким образом, если рассматривается задача в напряжениях, то используется уравнение совместности деформаций (13); если в перемещениях - уравнение равновесия (14).

Обратимся к соотношениям (12), которые, как нетрудно видеть, являются общими интегралами уравнений (13), (14). Действительно, если задача рассматривается в напряжениях, то, выразив производные от U ,$\overline{U}$ через комплексные «градиенты» от W , $\overline{W}, \omega$ из (12) и подставив в (13), получим тождество. Нетрудно доказать и обратное. Если задача рассматривается в перемещениях, то, выразив «градиенты» перемещений и ω через функции напряжений $\psi, U, \overline{U}$ и подставив в (14), получим тождество. Обратно из (14) следуют соотношения (12), где U ,$\overline{U}$– произвольные комплексно- сопряженные, а $\psi -$ произвольная действительная функции.

Следовательно, комплексный закон Гука, который связывает между собой силовые и деформационные характеристики упругого тела, является общим интегралом уравнений (13), (14). Поэтому на соотношения (12) можно посмотреть, как на систему уравнений первого порядка относительно $W, \overline{W}, U, \overline{U}, \psi, \omega$. Присоединив соответствующие граничные условия основных задач теории упругости, получим соответствующие краевые задачи теории обобщенного аналитического(квазианалитического) вектора.

2. Приведение к каноническому виду. Задача Римана-Гильберта. Будем предполагать, что упругие параметры в (12) – непрерывно дифференцируемые функции во всей области D, включая границу Г.

С помощью замены переменных

$$U = \mu(e_1 u + \bar{v}), W = e_2 u - \bar{v}, q = (\delta+\varepsilon)\omega - i\psi \quad (15)$$

систему уравнений (12) приведем к каноническому (по И.Г.Петровскому [3,15]) виду:

$$X_s - QX_z = AX + B\overline{X} + Y = F, \|Q\| < 1 \quad (16)$$

Здесь матрицы X, Y, Q, A, B имеют следующий вид:

$$X=\begin{pmatrix} u \\ v \\ q \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered} a_{11}=-k_0\left(\left(\mu e_1\right)_s+\mu e_{2s}\right),\ a_{21}=k_1\left(\left(\mu+\alpha\right)\left(\mu e_1\right)_z-2\mu p_2 e_{2z}\right),\ a_{22}=-k_1\left(\lambda+3\mu+\alpha\right)\mu_s, \\ a_{23}=b_{23}=\frac{i}{2\left(\delta+\alpha\right)\left(\mu+\alpha\right)},\ a_{31}=i\mu k_1,\ a_{33}=b_{33}=\frac{\left(\delta+\varepsilon\right)_s}{2\left(\delta+\varepsilon\right)},\ b_{12}=-k_0\mu_s,\ b_{22}=-2k_1 p_2\mu_z, \\ b_{21}=k_1\left(\left(\mu+\alpha\right)\left(\mu e_1\right)_s-\left(\left(\mu+2\alpha\right)\left(\lambda+\mu\right)+\mu\alpha\right)e_{2s}\right),\ b_{32}=i\mu,\ Y_1=-\frac{g_2}{\mu\left(e_1+e_2\right)}, \\ Y_2=\frac{g_1}{\mu\left(\lambda+2\mu\right)},\ Y_3=-\frac{m}{2},\ k_0=\frac{2p_2}{\left(\lambda+2\mu\right)\left(\mu+\alpha\right)},\ k_1=\frac{1}{\left(\lambda+2\mu\right)\left(\mu+\alpha\right)} \end{gathered} \tag{18}$$

В (16) X- неизвестный обобщенный аналитический (квазианалитический) вектор.

Краевая задача Римана-Гильберта для обобщенного аналитического (квазианалитического) вектора формулируется следующим образом: определить обобщенный аналитический вектор, непрерывный в смысле Гельдера в $D+\Gamma$ и удовлетворяющий граничному условию

$$Re\left(\overline{G(t)}X(t)\right)=L(t), \tag{19}$$

где $G(t)$ - заданная и непрерывная по Гельдеру на Γ матрица $\left(\det G(t)\neq 0\right)$ и $L(t)$ - заданный непрерывный по Гельдеру, действительный вектор [2-5]. Условия на G,L можно ослабить, рассматривая их в классе суммируемых функций [4,5].

Рассмотрим первую краевую задачу теории упругости, когда на границе заданы усилия.

$$\begin{gathered} \sigma_{11}n_1+\sigma_{21}n_2=r_1, \\ \sigma_{12}n_1+\sigma_{22}n_2=r_2, \\ \mu_{13}n_1+\mu_{23}n_2=R_3=R \end{gathered} \tag{20}$$

Границу Γ области D будем проходить против часовой стрелки, тогда область D при обходе контура остается слева и внешняя нормаль к контуру Γ, записанная в комплексной форме, имеет вид:

$$n = n_1 + in_2 = \frac{dx_2}{d\sigma} - i\frac{dx_1}{d\sigma} = -i\frac{dz}{d\sigma}, \tag{21}$$

где $d\sigma$ –длина элементарной дуги контура.

Учитывая (6),(20),(21), граничные условия (20) запишутся в виде:

$$nT_1 + \bar{n}T_2 = 2r = 2(r_1 + ir_2), \quad \bar{n}M + n\bar{M} = 2R\,, \tag{22}$$

а через функции напряжений (11) как:

$$U_\Gamma = r_* = C_1 + \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma}(ir + \theta_2\frac{dx_1}{d\sigma} + i\theta_1\frac{dx_2}{d\sigma})d\sigma,$$

$$\psi_\Gamma = R_* = C_2 - \int_{\sigma_0}^{\sigma}(R + m\frac{dx_2}{d\sigma} + \bar{r}_*\frac{dz}{d\sigma} + r_*\frac{ds}{d\sigma})d\sigma\,, \tag{23}$$

где произвольные постоянные C_1, C_2 для односвязной области без потери общности можно положить равными нулю.

Разделяя в (19) действительную и мнимые части и учитывая (15), получим:

$$\overline{G_1} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ -ie_1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re(r_*/\mu) \\ Im(r_*/\mu) \\ R_* \end{pmatrix}, \det(G_1) = 2e_1 \neq 0 \tag{24}$$

Для второй краевой задачи теории упругости, когда на границе области заданы перемещения W_*, ω_*, аналогичными рассуждениями как и для первой краевой задачи, получим:

$$\overline{G_2} = \begin{pmatrix} e_2 & -1 & 0 \\ -ie_2 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re(W_*) \\ Im(W_*) \\ \omega_*(\delta+\varepsilon) \end{pmatrix}, \det(G_2) = 2ie_2 \neq 0 \tag{25}$$

Для третьей (смешанной) задачи матрица $\boldsymbol{G}_3$ принимает соответственно значения $\boldsymbol{G}_1$ или $\boldsymbol{G}_2$ и терпит разрыв на множестве меры нуль.

Таким образом, основные краевые задачи плоской моментной теории упругости изотропного неоднородного тела сводятся к краевой задаче Римана-Гильберта для обобщенно-аналитического (квазианалитического) вектора.

Отметим, что индексы первой и второй краевых задач в случае непрерывных $\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2$ равны нулю [4], что видно из (24),(25) ($\det(G)$ принимают действительное или чисто мнимое значения, нигде не обращающиеся в нуль). Для третьей краевой задачи разрывная матрица $\boldsymbol{G}_3$ в граничном условии с помощью определенной процедуры сводится к непрерывной матрице [4,16].

3. Интегральные уравнения по области для канонической системы уравнений .

При исследовании краевых задач эллиптических систем $2m$ уравнений $(m>1)$ первого порядка для квазианалитического вектора предварительно производят конформное отображение односвязной области на единичный круг. Такое отображение не изменяет свойств решений системы уравнений, но позволяет упростить граничные условия. Рассмотрим операторы, действующие на функциях, определенных в круге **K** $(|z|<1)$, которые используются в дальнейшем:

$$T_0 f = -\frac{1}{\pi}\iint_{\boldsymbol{K}}\left[\frac{f(t)}{t-z}+\frac{z\overline{f(t)}}{1-z\bar{t}}\right]dk_t$$

$$S_0 f = -\frac{1}{\pi}\iint_{\boldsymbol{K}}\left[\frac{f(t)}{(t-z)^2}+\frac{\overline{f(t)}}{(1-z\bar{t})^2}\right]dk_t \qquad (26)$$

Для них справедливы соотношения:

$$\frac{\partial T_0 f}{\partial s} = f, S_0 f = \frac{\partial T_0 f}{\partial z}, \quad \operatorname{Re} T_0\left(f \mid e^{i\gamma}\right) = 0, \text{ при } z = e^{i\gamma}, \gamma \in [0, 2\pi] \qquad (27)$$

Первый из них является регулярным, а второй - сингулярным интегралом в смысле главного значения по Коши ($S_0 f$ существует при $f \in L_p(\boldsymbol{K})$ и $\|S_0 f\|_{L_p} \le \lambda_p \|f\|_{L_p}$, где λ_p - ограниченная постоянная, зависящая только от p, т.е оператор S_0 является линейным и ограниченным в $L_p(\boldsymbol{K})$, $p>1$ (L_p -пространство функций, интегрируемых в **K** со степенью p) [2-4].

Рассмотрим первую и вторую краевые задачи для неоднородного изотропного тела в единичном круге. Поскольку индексы краевых задач равны нулю, то решение (16), (19) в круге $|z|<1$ ищется в виде [2-4]:

$$X = \Phi + T_0\rho \,, \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \,, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ - голоморфный вектор, T_0 - оператор, определяемый (26). После подстановки (28) в (16), (19) получим:

$$\rho - QS_0\rho = Q\Phi' + A(T_0\rho + \Phi) + B\overline{(T_0 + \Phi)} + Y \tag{29}$$

$$Re(\overline{G\Phi}) = L \tag{30}$$

Для решения интегрального уравнения (29) предварительно необходимо определить голоморфный вектор, удовлетворяющий краевому условию (30). То есть решить задачу Римана – Гильберта для голоморфного вектора.

Следуя Н.И.Мусхелишвили [17], продолжим вектор $\Phi(z)$ вне единичного круга ($\boldsymbol{K}^-$) по формуле:

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{s}\right)} \tag{31}$$

Обозначим кусочно-голоморфную функцию, равную $\Phi(z)$ в $\boldsymbol{K}^+$ и $\Phi_*(z)$ в $\boldsymbol{K}^-$, снова через $\Phi(z)$. Определенная таким образом функция Φ, ограничена на бесконечности, и обладает свойством:

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{s}\right)} = \Phi(z), \quad \text{при } |z| \neq 1$$

Тогда краевая задача Римана - Гильберта (30) для кусочно-голоморфного вектора сводится к задаче сопряжения [17,18]:

$$\Phi^+ = -\overline{G^{-1}}G\Phi^- + 2\overline{G^{-1}}L \tag{32}$$

Решение же краевой задачи Римана-Гильберта (30) получается как полусумма $\Phi(z)$ и $\Phi_*(z)$.

Представляя голоморфный вектор в виде интеграла Коши

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=\frac{1}{2\pi\cdot i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt \tag{33}$$

и используем формулы Сохоцкого - Племеля [17]:

$$\boldsymbol{\Phi}^{+}(t_0)=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi\cdot i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \quad , \quad \boldsymbol{\Phi}^{-}(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi\cdot i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt$$

краевую задачу (32) сведем к системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\boldsymbol{A}(t_0)\varphi(t_0)+\frac{\boldsymbol{B}(t_0)}{\pi\cdot i}\int\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt=\boldsymbol{f}(t_0)\ , \tag{34}$$

где
$$\mathbf{A}=\mathbf{E}-\overline{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G},\quad \mathbf{B}=\mathbf{E}+\overline{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G},\quad \mathbf{f}=4\overline{\mathbf{G}}^{-1}L \tag{34a}$$

Обозначим через $M\varphi$ интегральный оператор:

$$M\varphi=\frac{1}{\pi\cdot i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt\ , \tag{35}$$

который понадобится нам в дальнейшем. Он дает решение уравнения $M\varphi=\psi(t_0)$ в виде: $\varphi(t_0)=M\psi$, т.е. обладает свойством $M^2\varphi=\varphi$ [17].

Для первой краевой задачи с учетом (24),(34а) получим:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{e_1} & 0\\ -e_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{e_1} & 0\\ e_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}2r_*/e_1\mu\\ 2\bar{r}_*/e_1\mu\\ -4iR_*\end{pmatrix} \tag{36}$$

Тогда система уравнений (34) примет вид:

$$e_1\varphi_1-\varphi_2+e_1M\varphi_1+M\varphi_2=2r_*/\mu\,,\qquad -e_1\varphi_1+\varphi_2+e_1M\varphi_1+M\varphi_2=2\bar{r}_*/\mu\, e_1,$$
$$\varphi_3=-2iR_* \tag{37}$$

Из первых двух соотношений (37) получим:

$$e_1 M\varphi_1 + M\varphi_2 = r_*/\mu + \bar{r}_*/\mu\, e_1 = l_1, e_1\varphi_1 - \varphi_2 = r_*/\mu - \bar{r}_*/\mu\, e_1 = l_2 \tag{38}$$

Из соотнощений (38) следует, что:

$$M\big(e_1(t_0) + e_1(t)\big)\varphi_1 = l_1 + Ml_2 = l_3 \tag{39}$$

Обращая интеграл (39) [19], получим:

$$\varphi_1(t_0) = \frac{1}{4\pi i e_1(t_0)} \oint_{\Gamma} \frac{\big(e_1(t_0) + e_1(t)\big) l_3(t)\, dt}{e_1(t)(t - t_0)} \tag{40}$$

Из соотношений (33), (37)-(40) определяем аналитический вектор $\Phi(z)$, а решение задачи (30) записываем в виде [17,18]: $\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\Phi}(z) + \boldsymbol{\Phi}_*(z)\big)$.То есть решение задачи (30) получено в замкнутой форме.

Аналогично рассматривается вторая краевая задача, для которой

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{e_2} & 0 \\ e_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{e_2} & 0 \\ -e_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 2W_*/e_2 \\ -\quad 2\overline{W_*} \\ 4(\delta + \varepsilon)\omega_* \end{pmatrix},$$

а решение соответствующей системы уравнений (34) записывается в виде:

$$\varphi_1(t_0) = \frac{1}{4\pi i e_2(t_0)} \oint_{\Gamma} \frac{\big(e_2(t_0) + e_2(t)\big) l_3(t)\, dt}{e_2(t)(t - t_0)},\ l_3 = W_* + MW_* + \bar{W}_* - M\bar{W}_*,$$

(41)

$$\varphi_2 = -e_2\varphi_1 + W_* - \overline{W_*}\ ,\ \varphi_3 = 2M(\delta + \varepsilon)\omega_*$$

Таким образом, голоморфные вектора для первой и второй краевых задач определяются в замкнутом виде.

При конформном отображении $z = \sigma(\eta)$ односвязной области на единичный круг дифференцирование по z заменяется дифференцированием по η. Матрицы $\boldsymbol{Q}_i$ в (16) умножаются на матрицу $\frac{\bar{\sigma}'}{\sigma'} I$, а ее правая часть – на $\bar{\sigma}' I$ (I- единичная матрица). Матрицы $\boldsymbol{G_1}, \boldsymbol{G_2}$ остаются прежними. Поэтому аналитические вектора определяются в замкнутом виде и для односвязной области.

Отметим, что разработана методика решения краевых задач в классе аналитических функций с суммированными (а не кусочно - гельдеровскими) функциями в граничных условиях [4,5,16]. К ним относится и задача Римана – Гильберта для аналитического вектора.

Система интегральных уравнений (16) в общем случае реализуется численным методом. Она может быть реализована, например, итерационным численным методом Ч. Ашыралиева-В.Н.Монахова [20] с геометрической скоростью сходимости.

4. Интегральные уравнения для составных тел. Теоремы существования и единственности. Для составных изотропных упругих тел необходимо в каждой подобласти привести систему уравнений (12) к каноническому виду, записать условия сопряжения на границе контакта подобластей (равенство сил и моментов, а также поступательных и угловых перемещений), получить решения в каждой подобласти с учетом граничных условий на границе области, и затем провести процедуру сшивки решения. Громоздкость этих процедур ясно показывает, что такой подход не очень удобен для практических расчетов.

Для того, чтобы ослабить условия на гладкость упругих, параметров введем неизвестные функции u, v, h :

$$U = u + \bar{v},\ W = a(u - \bar{v}),\ \omega = b(h + \bar{h}),\ -i\psi = (h - \bar{h}), \tag{42}$$

где a,b - действительные, пока неопределенные постоянные. Подставляя (42) в систему уравнений (12) и ряда несложных преобразований, получим:

$$X_s - \mu_1 X_z - \mu_2 \bar{X}_s = AX + B\bar{X} + N, \tag{43}$$

где

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix},\ \mu_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu_1^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\mu_2=\begin{pmatrix} 0 & \mu_2^{12} & 0 \\ \mu_2^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^{33} \end{pmatrix},A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_1=-\frac{g_2}{1+a\mu},\ N_2=\frac{g_1}{1+a(\lambda+\mu)},\ N_3=-\frac{m}{2(1+b(\delta+\varepsilon))},\ \mu_2^{12}=-\frac{1-a\mu}{1+a\mu},\ \mu_1^{21}=\frac{2ap_2}{(1+a(p_1-p_2))(1+a(p_1+p_2))},$$

$$\mu_2^{21}=-\frac{1-a^2(p_1^2-p_2^2)}{(1+a(p_1-p_2))(1+a(p_1+p_2))},\ \mu_2^{33}=-\frac{1-b(\delta+\varepsilon)}{1+b(\delta+\varepsilon)},\ a_{23}=b_{23}=\frac{ib\alpha}{1+a(p_1-p_2)},\ a_{31}=b_{32}=\frac{i}{1+b(\delta+\varepsilon)} \qquad (44)$$

В реальной ситуации упругие модули, объемные силы и моменты ограничены.Нетрудно видеть, что при любых положительных действительных постоянных *a,b* выполняется условие эллиптичности системы уравнений (43):

$$\max_i \sum_{j=1}^{2}\left|\mu_1^{ij}\right| + \max_i \sum_{j=1}^{2}\left|\mu_2^{ij}\right| \le \mu_0 < 1 \qquad (45)$$

В частности можно положить

$$a=\frac{1}{\sqrt{(\alpha(\lambda+\mu))_{\max}}},\ b=\frac{1}{(\sigma+\varepsilon)_{\max}} \qquad (46)$$

Хорошо известно, что решения эллиптических систем непрерывны, т.е не могут иметь сильные разрывы [13,21]. Следовательно, на границах раздела контактных подобластей вектор X непрерывен, и тогда в силу подстановки (42), непрерывны ω,ψ,W,U . Таким образом, для системы уравнений (43) автоматически выполняются условия сшивки решений.

При конформном отображении $z=\sigma(\eta)$ односвязной области на единичный круг дифференцирование по z заменяется дифференцированием по η. Матрица μ_1 в (43) умножается на матрицу $\frac{\overline{\sigma}'}{\sigma'} I$, а правая часть (43) – на $\overline{\sigma}'I$. Матрицы $\boldsymbol{G_1},\boldsymbol{G_2}$ остаются прежними.

Учитывая (42) , граничные условия для первой краевой задачи запишутся в виде:

$$\bar{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re(r_*) \\ Im(r_*) \\ 0{,}5R_* \end{pmatrix}, \det(G_1) = 2 \neq 0 \tag{47}$$

Для второй краевой задачи:

$$\overline{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Re(W_*/a) \\ Im(W_*/a) \\ \omega_*/2b \end{pmatrix}, \det(G_2) = 2i \neq 0 \tag{48}$$

Так как индексы краевых задач (47), (48) равны нулю, то решение векторного уравнения (43) представляется в виде (28). В результате приходим к интегральному уравнению по области:

$$\rho - \mu_1 S_0 \rho - \mu_2 \bar{S}_0 \bar{\rho} = A(\Phi + T_0\rho) + B(\bar{\Phi} + \bar{T}_0\bar{\rho}) + \mu_1\Phi' + \mu_2\bar{\Phi}' + N, \tag{49}$$

которое при численных расчетах реализуется по схеме последовательных приближений с геометрической скоростью сходимости:

$$\rho_{n+1} - \mu_1 S_0 \rho_{n+1} - \mu_2 \bar{S}_0 \bar{\rho}_{n+1} = AT_0\rho_n + B\bar{T}_0\bar{\rho}_n + N_0, \quad N_0 = \mu_1\Phi' + \mu_2\bar{\Phi}' + A\Phi + B\bar{\Phi} + N$$

Поскольку матрицы $\boldsymbol{G_1}, \boldsymbol{G_2}$ - постоянны, то голоморфный вектор $\boldsymbol{\Phi}$ определяется в явном виде:

$$\varphi = \frac{1}{4}\left(\left(I - p^{-1}\right)L + \left(I + p^{-1}\right)ML\right), \; p^{-1} = G^{-1}\bar{G} \tag{50}$$

Для первой и второй краевых задач:

$$p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; p_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Окончательно голоморфный вектор определяется как $\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\Phi}(z) + \boldsymbol{\Phi}_*(z)\right)$.

Для треугольных матриц μ_1, μ_2, A, B и матриц, близких к диагональным, в работе Е.А. Раенко [22] доказана однозначная разрешимость краевой задачи (16), (19). Для квазилинейной системы (16) ,(19) в работах В.Н. Монахова [4,5] доказано существование хотя бы одного решения при условии ограничения на рост правой части (16). Ограничение на рост в правой части (16) вызвано существом дела, поскольку даже простейшее линейное уравнение с ограниченными коэффициентами

$$X_s = A(z)X + B(z)$$

может не иметь ограниченных решений в конечной области *D* [5].

Для линейной краевой задачи (43),(19) условие на рост правой части системы уравнений (43) состоит в том, что нормы матриц *A, B* не превышают достаточно малых чисел [5]. В реальной ситуации упругие модули , объемные силы и моменты ограничены. Для составных упругих тел упругие модули непрерывно-дифференцируемые функции координат, имеющие разрывы первого рода. Если в последних двух соотношениях (44) выбрать *a ,b* достаточно большими числами, например *a=b²* , то нормы матриц *A, B* можно сделать сколь угодно малыми. Поэтому решение краевой задачи (43),(19) при выбранных *a ,b* , согласно результатам работы [5], существует и единственно при μ_1, μ_2, *A, B,* $N \in L_{p>2}(K)$, $L \in SW_p^1$. Но тогда однозначно разрешима краевая задача (43), (19) при любых положительных *a ,b* , поскольку этот случай сводится к предыдущему с помощью изменения масштабных множителей.

Если от переменных краевой задачи (43), (19) перейти к переменным краевой задачи (16), (19), то при условии $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \in W_p^1,\ Y \in L_p, \mathbf{G}, \mathbf{g} \in SW_p^{\ 1}, p > 2$, однозначно разрешима краевая задача (16),(19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bers L. Partial differential equations and generalized analytic functions //Proc. Nat. Ac. Se. USA. 1951. Vol. 37. № 1. P. 42-47.

2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.

3. Боярский Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора //Annales Polonici Mathematicy. 1966. Vol. 17. P. 281-320.

4. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. М.: Наука, 1977. 424 с.

5. Монахов В.Н. Нелинейные диффузионные процессы //Сиб. мат. Журнал. 2003. Т. 44. № 5. С. 1082-1097.

6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

7. Мартынов Н.И. Краевые задачи теории упругости неоднородной среды как краевые задачи обобщенного аналитического вектора // Математический журнал. 2007. № 3(25). С. 69-77.

8. Мартынов Н.И. Приведение краевых задач теории упругости к краевым задачам обобщенного аналитического вектора //Тез. докл. межд. Науч. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвящ. 100-лет. со дня рожд. академика И.Н. Векуа. Н.: 2007. С. 518-519.

9. Алексеева Л.А., Мартынов Н.И., Федоров И.О. Применение квазиконформного отображения в задачах кручения неоднородных анизотропных тел //Математический журнал. 2009. Т.9. № 3(33). С. 14-18.

10. Мартынов Н.И. Интегральные уравнения по области в статической теории упругости неоднородной среды //Доклады НАН РК. – 2010. -№ 3, С.11-16.

11.Martynov N.I., Chuprasov A.A. Application of the quasianalytical vector theory to boundary-valuy problems of the elasticity theory non-homogeneous anisotropic medium. //Materials of the II international research and practice conference «European Science and Technology».-Wiesbaden, Germany 2012, v. II, P.29-37.

12. Новацкий В. Теория упругости. М: Мир, 1975, 866с.

13.Купрадзе В.Д., Гегели Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.Трехмерные задачи математической теории упругости термоупругости.М: Наука, 1976, 2-е изд.,866с.

14. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение,1986. 336с.

15. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Гос.изд.тех.-теор.лит.,1953. 360с.

16. Антонцев С.Н., Монахов В.Н. Краевые задачи с разрывными граничными условиями для квазилинейных эллиптических систем $2m(m \geq 1)$ уравнений первого порядка //Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. Т.8. № 2. С. 65-73.

17. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения (граничные задачи теории функций и некоторые их приложения в математической физики). М.: Физ. -мат. лит., 1962. 599 с.

18. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.

19. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640с.

20. Ашыралиев Ч., Монахов В.Н. Итерационный алгоритм решения двумерных сингулярных интегральных уравнений //Динамика сплошной среды. 1991. Вып.101. С. 21-29.

21. Ладыженская О.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. 538с.

22. Раенко Е.А. Краевые задачи для квази - голоморфного вектора //Динамика сплошной среды. 2001. Вып.118. С. 65-68.

REFERENCES

1. Bers L. Partial differential equations and generalized analytic functions //Proc. Nat. Ac. Se. USA. 1951. Vol. 37. № 1. P. 42-47.

2. Vekua I.N. Obobshhennye analiticheskie funkcii. M.: Nauka, 1988. 509 s.

3. Bojarskij B.V. Teorija obobshhennogo analiticheskogo vektora //Annales Polonici Mathematicy. 1966. Vol. 17. P. 281-320.

4. Monahov V.N. Kraevye zadachi so svobodnymi granicami dlja jellipticheskih sistem uravnenij. M.: Nauka, 1977. 424 s.

5. Monahov V.N. Nelinejnye diffuzionnye processy //Sib. mat. Zhurnal. 2003. T. 44. № 5. S. 1082-1097.

6. Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s.

7. Martynov N.I. Kraevye zadachi teorii uprugosti neodnorodnoj sredy kak kraevye zadachi obobshhennogo analiticheskogo vektora // Matematicheskij zhurnal. 2007. № 3(25). S. 69-77.

8. Martynov N.I. Privedenie kraevyh zadach teorii uprugosti k kraevym zadacham obobshhennogo analiticheskogo vektora //Tez. dokl. mezhd. Nauch. konf. «Differencial'nye uravnenija, teorija funkcij i prilozhenija», posvjashh. 100-let. so dnja rozhd. akademika I.N. Vekua. N.: 2007. S. 518-519.

9. Alekseeva L.A., Martynov N.I., Fedorov I.O. Primenenie kvazikonformnogo otobrazhenija v zadachah kruchenija neodnorodnyh anizotropnyh tel //Matematicheskij zhurnal. 2009. T.9. № 3(33). S. 14-18.

10. Martynov N.I. Integral'nye uravnenija po oblasti v staticheskoj teorii uprugosti neodnorodnoj sredy //Doklady NAN RK. – 2010. -№ 3, C.11-16.

11.Martynov N.I., Chuprasov A.A. Application of the quasianalytical vector theory to boundary-valuy problems of the elasticity theory non-homogeneous anisotropic medium // Materials of the II international research and practice conference «European Science and Technology».-Wiesbaden, Germany 2012, v. II, P.29-37.

12. Novackij V. Teorija uprugosti. M: Mir, 1975, 866s.

13.Kupradze V.D., Gegeli T.G., Bashelejshvili M.O.,Burchuladze T.V.Trehmernye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti termouprugosti.M: Nauka, 1976, 2-e izd., 866 s.

14. Chernyh K.F. Nelinejnaja teorija uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah. L.: Mashinostroenie,1986. 336s.

15. Petrovskij I.G. Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi. M.: gos.izd.teh.-teor.lit.,1953. 360s.

16. Antoncev S.N., Monahov V.N. Kraevye zadachi s razryvnymi granichnymi uslovijami dlja kvazilinejnyh jellipticheskih sistem uravnenij pervogo porjadka //Izv. SO AN SSSR, ser. tehn. nauk. 1967. T.8. № 2. S. 65-73.

17. Mushelishvili N.I. Singuljarnye integral'nye uravnenija (granichnye zadachi teorii funkcij i nekotorye ih prilozhenija v matematicheskoj fiziki). M.: Fiz. -mat. lit., 1962. 599 s.

18. Vekua N.P. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij i nekotorye granichnye zadachi. M.: Nauka, 1970. 379 s.

19. Gahov F.D. Kraevye zadachi. M.: Nauka, 1977. 640s.

20. Ashyraliev Ch., Monahov V.N. Iteracionnyj algoritm reshenija dvumernyh singuljarnyh integral'nyh uravnenij //Dinamika sploshnoj sredy. 1991. Vyp.101. S. 21-29.

21. Ladyzhenskaja O.A., Ural'ceva N.I. Linejnye i kvazilinejnye uravnenija jellipticheskogo tipa. M.: Nauka, 1964. 538s.

22. Raenko E.A. Kraevye zadachi dlja kvazi - golomorfnogo vektora //Dinamika sploshnoj sredy. 2001. Vyp.118. S. 65-68.

Резюме

Н.И. Мартынов

(«Математика және математикалық үлгілеу институты» РМК, Алматы қ.)

БІРТЕКТІ ЕМЕС ИЗОТРОПТЫҚ ОРТАНЫҢ ЖАЛПАҚ МОМЕНТТІК СЕРПІМДІЛІК ТЕОРИЯСЫНЫҢ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРІ КВАЗИАНАЛИТИКАЛЫҚ ВЕКТОРДЫҢ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРІ РЕТІНДЕ

Квазианалитикалық вектор үшін біртекті емес изотроптық ортаның жалпақ моменттік серпімділік теориясының шеттік есептері Риман-Гильберт шеттік есептерге келтірілді. Құрамды серпімді орта үшін жалпыланған шешімді бірден анықтауды қамтамасыз ететін облыс бойынша бірмәнді шешілімді интегралдық теңдеулер қорытылып шығарылды.

Кілт сөздер: изотроптық дене, интегралдық теңдеу, шеткі есеп, көрсеткіш.

Summary

N.I. Martynov

(Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty)

BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE FLAT MOMENT THEORY OF ELASTICITY FOR THE INHOMOGENEOUS ISOTROPIC MEDIUM AS BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE QUASIANALYTIC VECTOR

Boundary value problems in the flat moment theory of elasticity for the inhomogeneous isotropic medium are reduced to the Riemann-Hilbert boundary value problems for the quasianalytic vector. Uniquely solvable integral equations are derived. These equations allow to directly find generalized solutions for composite elastic mediums.

Keywords: м Keywords: Isotropic body, the integrated equations, regional problem, index.

Поступила 2.04.2013 г.