

*Б. Ж. МЕДЕТОВ, А. Ж. НАУРЗБАЕВА, А. Е. ЫСКАК*

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХЧАСТОТНОГО РЕЖИМА ГЕНЕРАЦИИ СИГНАЛОВ КЛАСТЕРОМ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

### **Аннотация**

В настоящей работе приведены результаты численного исследования условий возникновения эффекта «двухчастотной» бифуркации Хопфа в кластере связанных между собой автоколебательных систем. Возможность возникновения подобной бифуркации, отличающейся от классического представления бифуркации Хопфа, была предсказана теоретически на основе анализа результатов, полученных при аналитическом решении системы уравнений, описывающих динамику рассматриваемого кластера. Но по теории не были определены условия, в каких случаях может возникать тот или иной режим, соответствующий двум разным частотам генерируемых сигналов. По результатам проведенных численных исследований установлены все необходимые условия, т.е. области значений параметров, в которых в данном кластере можно наблюдать соответствующие режимы.

**Ключевые слова:** бифуркация, бифуркация Хопфа, предельный цикл, сигнал, автоколебательная система, кластер нейронов.

**Кілт сөздер:** бифуркация, Хопф бифуркациясы, шектік цикл, сигнал, автотербелмелі жүйе, нейрондар кластері.

**Keywords:** bifurcation, Hopf bifurcation, limit cycle, signal, oscillatory systems, neurons cluster.

**1. Введение.** В работе [1] в результате теоретических исследований поведения кластера, состоящего из двух линейно-отрицательно связанных автоколебательных систем, была предсказана возможность рождения «двухчастотной» бифуркации Хопфа вблизи состояния равновесия. В качестве автоколебательной системы рассматривалась модель нейрона, предложенная Фитц Хью-Нагумо [2]. В таком случае кластер из двух линейно-отрицательно связанных нейронов можно представить в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + \gamma_1 * x_2 \\ \frac{dy_1}{dt} = \varepsilon_1(x_1 + a_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 - \gamma_2 * x_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \varepsilon_2(x_2 + a_2) \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_1, y_1, x_2, y_2$  – динамические переменные, связанные с физико-биологической природой нейрона, а  $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, a_1, a_2$  – являются параметрами системы, принимающими только положительные числа. В теории рассматривался случай  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ .

Система, описываемая уравнениями (1), имеет особую неподвижную точку, соответствующую состоянию равновесия при следующих значениях переменных:

$$x_1^0 = -a_1; x_2^0 = -a_2; y_1^0 = a_1 - \frac{a_1^3}{3} + \gamma_1 * a_1; y_2^0 = a_2 - \frac{a_2^3}{3} - \gamma_2 * a_1 \quad (2)$$

Условие возникновения бифуркации Хопфа в данном случае принимает вид:

$$a_1^2 + a_2^2 = 2 \quad (3)$$

Из теории следует, что для определенных значений параметров  $a_1$  и  $a_2$ , удовлетворяющим условию (3), в системе вблизи состояния равновесия возможны рождения двух предельных циклов, отличающихся по частоте примерно в 27 раз или возникновение квазипериодического колебания (биение).

**2. Основная часть.** В настоящей работе приведены результаты численных исследований, проведенные с целью установления наиболее полных условий рождения предельных циклов и возбуждения квазипериодического колебания.

Итак, по результатам численного исследования установлено, что возбуждение квазипериодического колебания (биение) возможно только при очень малых значениях параметра  $\varepsilon \leq 0,01$ . А при  $\varepsilon \approx 0,1$  в системе рождается «двухчастотная» бифуркация Хопфа, при этом для реализации «медленного» предельного цикла необходимо вывести систему из состояния равновесия на малое значение по переменным  $y_1$  или  $y_2$ . Соответственно, условием рождения «быстрого» предельного цикла является необходимость отклонения системы от состояния равновесия по переменным  $x_1$  или  $x_2$ .

На рисунке 1 показана временная реализация переменной  $x_1$  при  $\varepsilon = 0,01$ . Как видим из этого рисунка, в данном случае в системе возбуждается квазипериодическое колебание.

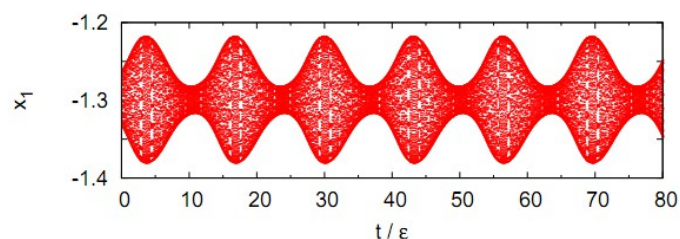


Рисунок 1 – Временная реализация квазипериодического режима

А на рисунке 2 на одной диаграмме показаны временные реализации двух режимов переменной  $x_1$  при  $\varepsilon=0,1$ .

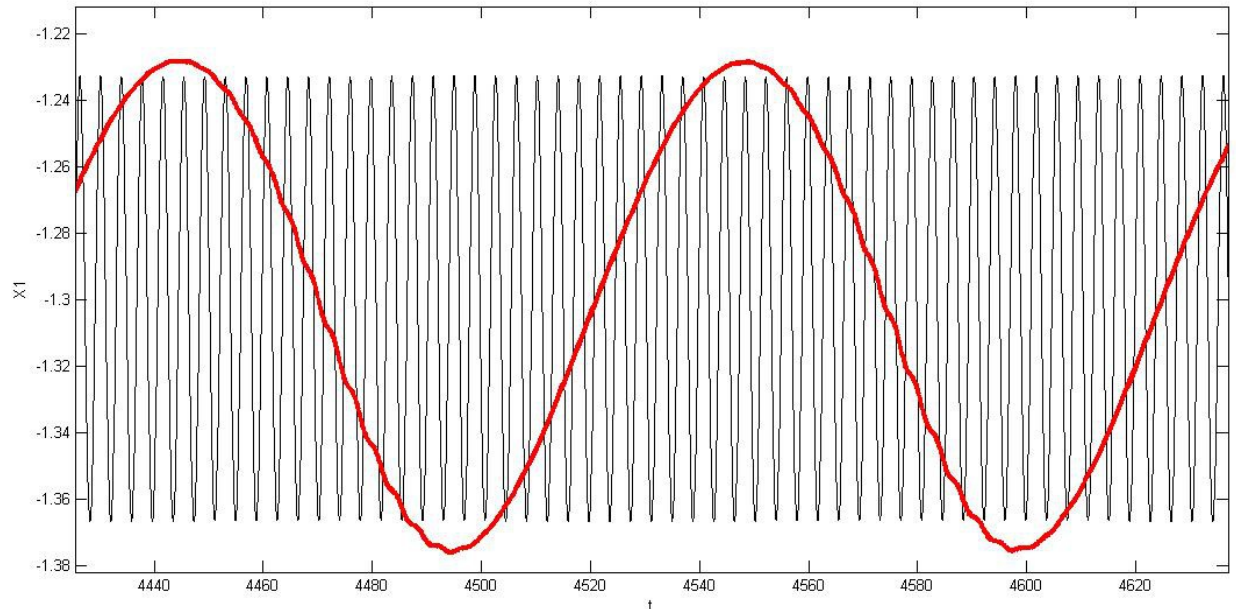


Рисунок 2 – Временная реализация обоих режимов.

Жирная линия – «медленный» режим, тонкая линия – «быстрый» режим

Частота колебания рождаемых предельных циклов определялась с помощью функции переходов через ноль по формуле:

$$Z(N) = 1/2 \sum_{i=1}^N \text{sign}(x_1(i+1)) - \text{sign}(x_1(i)) \quad (4)$$

где  $N$  – количество точек в рассматриваемом фрагменте временной реализации динамической переменной  $x$ ,  $\text{sign}(x_i)$  – знаковая функция. Тогда частота колебания приблизительно можно определить так:

$$F = \frac{Z(N) \cdot F_s}{N} \quad (5)$$

где  $F_s$  – частота дискретизации значений переменной  $x$ .

На рисунке 3 и 4 показаны фазовые портреты двух режимов в системе координат  $x_1$  и  $y_1$ . По виду этих фазовых портретов (окружность) видно, что рождающиеся режимы являются предельными циклами.

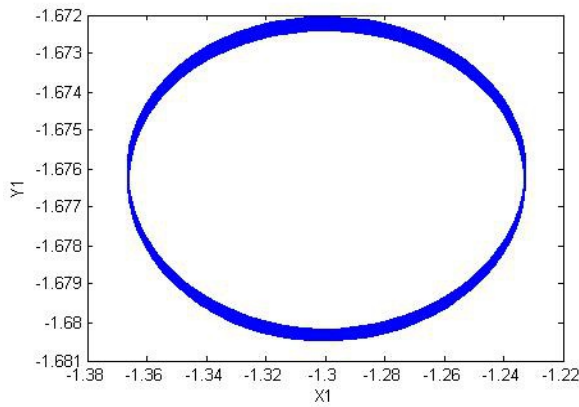


Рисунок 3 – Фазовый портрет «быстрого» режима

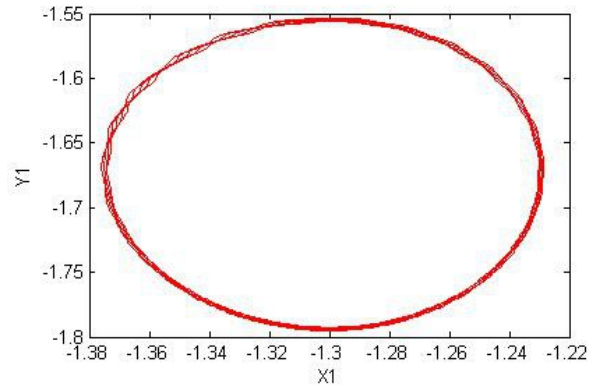


Рисунок 4 – Фазовый портрет «медленного» режима

Кроме того, в проведенных численных экспериментах также осуществляется поиск множества пар значений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , при которых в системе может быть рожден двухчастотный режим. Для осуществления данного поиска требовалось выполнить большое количество интегрирований системы дифференциальных уравнений (1). Все численные исследования проводились в среде MatLab, в котором в качестве стандартного средства интегрирования используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Известно, что данный метод является достаточно универсальным, но не обеспечивает должного уровня быстродействия выполняемых расчетов, интегрирования проводились с помощью метода разложения в ряд Тейлора [3]. Предположим, что  $y(t)$  – достаточно гладкая функция, тогда ее можно представить в виде ряда Тейлора:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h * y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \dots \quad (6)$$

где  $h$  – шаг интегрирования.

На рисунке 5 в системе координат  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  показана область значений параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , при которой в рассматриваемом кластере можно обнаружить «двухчастотную» бифуркацию Хопфа.

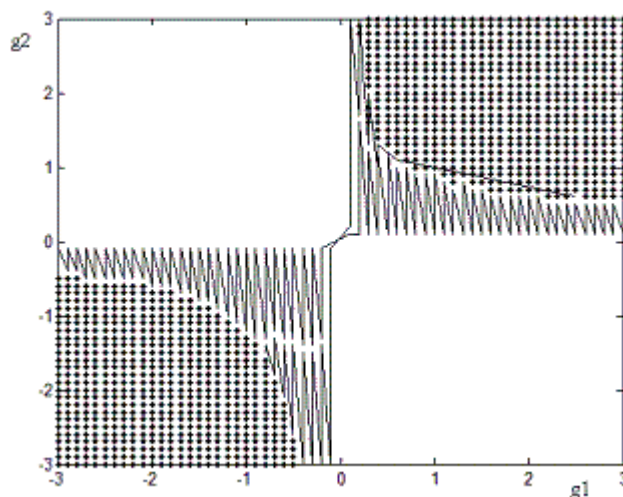


Рисунок 5 – Область значений параметров (в виде точек)  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , при которой в рассматриваемом кластере можно обнаружить «двухчастотную» бифуркацию Хопфа

**Заключение.** По результатам проведенных численных исследований поведения кластера, состоящего из линейно-отрицательно связанных автоколебательных систем, вблизи состояния равновесия установлено, что:

- 1) «медленной» режим «двухчастотной» бифуркации Хопфа рождается при отклонении системы от состояния равновесия по переменным  $y_1$  или  $y_2$ , а «быстрый» режим при отклонении системы от состояния равновесия по переменным  $x_1$  или  $x_2$ ;
- 2) «двухчастотная» бифуркация Хопфа может рождаться только для значений  $\varepsilon$  порядка 0,1, а также для конечного множества значений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ;
- 3) возбуждение квазипериодического колебания (биение) происходит при очень малых значениях  $\varepsilon \leq 0,01$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Жанабаев З.Ж., Закс М., Медетов Б.Ж. Генерация сигналов кластером связанных двух автоколебательных систем на границе потери устойчивости равновесия. Теория. – ПЭОС, вып. 14. – Т. 1. – 2012.
- 2 Cronin Jane. Mathematical aspects of Hodgkin-Haxley neural theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- 3 [Самарский А.А.](#), Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.

## REFERENCES

1 Zhanabev Zh., Zaks M., Medetov B. Generatsya signalov klasterom svyazonnyh dvuh avtokolebatelnyh system na granitse poteri ustoichivosti ravnovesiya. Teorya., PEOS, vyp. 14, T. 1, 2012 (in Russ).

2 Cronin Jane Mathematical aspects of Hodgkin-Haxley neural theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

3 Samarskii A., Gulin A. Chislennye metody. – M.: Nauka. Gl. red. phiz-mat lit., 1989 (in Russ).

## Резюме

*Б. Ж. Медетов, А. Ж. Наурызбаева, А. Е. Ысқақ*

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

### АВТОТЕРБЕЛМЕЛІ ЖҮЙЕЛЕР КЛАСТЕРІНДЕ ҚОСЖИЛІКТІК СИГНАЛДАРДЫҢ ПАЙДА БОЛУЫ РЕЖИМДЕРІН САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

Бұл жұмыста екі автотербелмелі жүйеден тұратын кластердің динамикасын сипаттайтын теңдеулер жүйесін талдау жолмен шешу нәтижесі бойынша, мұндай кластерде, теориялық тұрғыдан алғанда, қосжиі-ліктік Хопф бифуркациясы пайда болуы мүмкін деген болжам сандық түрде зерттелінген. Негізгі мақсат – әртүрлі жиіліктерге сай келетін шарттарды анықтау, яғни параметрлер мәндерінің облыстары қандай болғанда жылдам немесе баяу режим байқалуы мүмкін деген сұраққа жауап берілген. Сонымен қатар квазипериодтық режимнің пайда болу шарттары да анықталды.

**Кілт сөздер:** Бифуркация, Хопф бифуркациясы, шектік цикл, сигнал, автотербелмелі жүйе, нейрондар кластері.

## Summary

*B. Medetov, A. Naurzabayeva, A. Yskak*

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

### NUMERICAL ANALYSIS OF DUAL-FREQUENCY SIGNAL GENERATION BY CLUSTERS OF OSCILLATING SYSTEMS

This paper presents the results of a numerical study of the conditions of the effect of "two-frequency" of the Hopf bifurcation in a cluster of related oscillatory systems. The possibility of

such a bifurcation, which differs from the classical concept of the Hopf bifurcation was predicted theoretically by analyzing the results obtained with the analytical solution of the system of equations describing the dynamics of the cluster. But the theory is not identified conditions under which cases may occur one or another mode, corresponding to two different frequencies of signal generators. The results of the numerical studies has all the necessary conditions, ie range of parameters, which in the cluster can see the corresponding mode.

**Keywords:** Bifurcation, Hopf bifurcation, limit cycle, signal, oscillatory systems, neurons cluster.

*Поступила 27.03.2013г.*