

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ «ДВУХЧАСТОТНОЙ» БИФУРКАЦИИ ХОПФА

Аннотация

В настоящей работе рассмотрена возможность обнаружения «двухчастотной» бифуркации Хопфа в реальных физических системах. Для этой цели сконструирована компьютерная модель электронной схемы в среде multisim, с помощью которой исследовались генерируемые сигналы. Данная электронная схема выполняет решение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику рассматриваемого кластера автоколебательных систем. Результаты схемотехнического исследования показали, что «двухчастотная» бифуркация Хопфа может быть обнаружена в реальных физических системах. Единственное отличие состоит в том, что так называемый «медленный» режим на самом деле оказался затухающим колебанием, а не предельным циклом, как предсказывалось теорией. Но данное отличие не является следствием неправильности выводов теории, а лишь связано с высоким уровнем ошибки интегрирования в компьютерной модели электронной схемы, где учитываются особенности интеграторов и реальные характеристики интегральных микросхем.

Ключевые слова: бифуркация, бифуркация Хопфа, предельный цикл, автоколебательная система, сигнал, схемотехника, интегральные микросхемы.

Кілт сөздер: бифуркация, Хопф бифуркациясы, шектік цикл, сигнал, автотербелмелі жүйе, схемотехника, интегралды микросхема.

Keywords: bifurcation, Hopf bifurcation, limit cycle, signal, oscillatory systems, circuit design, integrated microcircuit.

1. Введение. В работе [1] приведены результаты теоретического исследования режимов генерации сигналов кластером, состоящего из двух взаимосвязанных автоколебательных систем. В качестве автоколебательной системы рассмотрена модель нейтрона ФитцХью-Нагумо [2]. Динамика такого кластера может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + \gamma_1 x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = \varepsilon_1(x_1 + a_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + \gamma_2 x_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \varepsilon_2(x_2 + a_2) \end{cases} \quad (1)$$

где переменные $x_{1,2}$ по смыслу означают потенциал мембраны клетки нейтрона; $y_{1,2}$ – концентрация ионов внутри клетки соответствующих нейтронов. Параметры $\gamma_{1,2}$ означают силу связи между нейтронами, при этом $\gamma_1 > 0$, а $\gamma_2 < 0$, что соответствует случаю, когда

первый нейрон действует на второй как возбуждающий, а второй – на первый как тормозящий. Для упрощения выводов аналитического решения системы (1) рассматривался случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Данная система имеет особую (неподвижную) точку, соответствующую состоянию равновесия, при следующих значениях переменных:

$$x_1^0 = -a_1; x_2^0 = -a_2; y_1^0 = a_1 - \frac{a_1^3}{3} + \gamma_1 * a_1; y_2^0 = a_2 - \frac{a_2^3}{3} - \gamma_2 * a_1 \quad (2)$$

Далее в ходе аналитического поиска решений, соответствующих устойчивости особой точки, было установлено, что при выполнении определенных условий в рассматриваемой динамической системе возможно рождение нетипичной, отличающейся от классического представления, «двухчастотной» бифуркации Хопфа. При этом согласно теоретическим расчетам частоты, соответствующие двум различным предельным циклом «двухчастотной» бифуркации Хопфа, отличаются друг от друга в 27 раз!

2. Основная часть. В настоящей работе рассматриваются вопросы о возможности обнаружения рождения «двухчастотной» бифуркации Хопфа, предсказываемой теорией, в реальных физических системах. Для этой цели в среде Multisim была сконструирована компьютерная модель электронной схемы, осуществляющей решение системы уравнений (1), которых можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \int (x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + \gamma_1 x_2) dt \\ y_1 = \int \varepsilon(x_1 + a_1) dt \\ x_2 = \int (x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 - \gamma_2 x_1) dt \\ y_2 = \int \varepsilon(x_2 + a_2) dt \end{cases} \quad (3)$$

Из системы уравнений (3) видно, что в данном случае в электронной схеме требуются четыре взаимосвязанных интеграторов. Значения параметров $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon, a_1, a_2$ задаются с помощью соответствующих резисторов RC-цепей интеграторов. В качестве «логической единицы» принят номинал резистора на входе первого интегратора, который соответствует сигналу, представляющего собой переменную x_1 . Все остальные значения резисторов RC-цепей интеграторов вычисляются относительно «логической единицы» в соответствии с заданными значениями параметров.

На рисунке 1 показана схема собранной модели в среде Multisim, где операционные усилители (ОУ), обозначенные как О1, О2, О3 и О4, представляют собой интеграторов. А ОУ обозначенные как О5 и О6 используются лишь как инверторы для получения различных знаков переменных. Начальные условия интегрирования задаются с помощью зарядки конденсаторов С1, С2, С3 и С4 до нужного уровня напряжения. Необходимо отметить, что начальные условия должны соответствовать положению состояния равновесия рассматриваемой динамической системы.

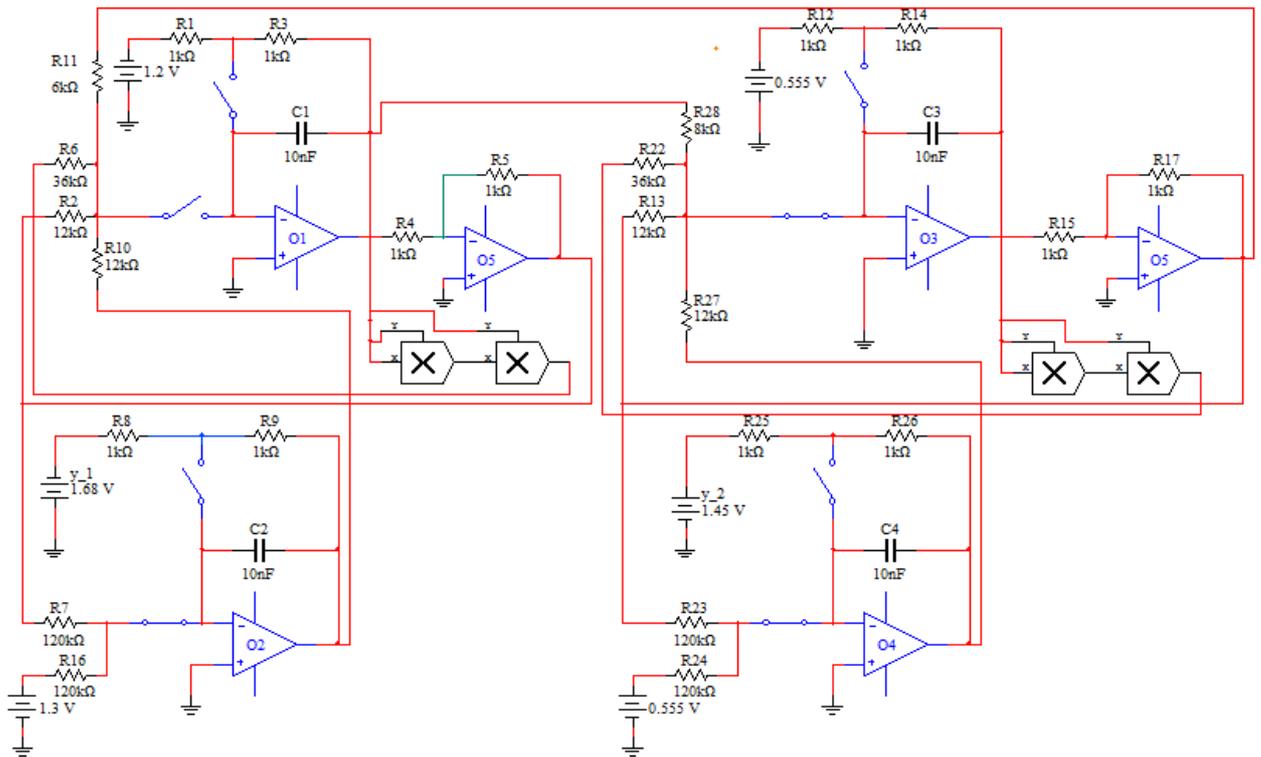


Рисунок 1 – Схема компьютерной модели

Номиналы элементов (резисторов и конденсаторов) на указанном рисунке соответствуют следующим параметрам системы:

$$a_1 = 1,3; \quad a_2 = 0,555; \quad \gamma_1 = 2; \quad \gamma_2 = -1,5; \quad \varepsilon = 0,1. \quad (4)$$

При данном наборе значений параметров положению особой точки соответствуют следующие значения:

$$x_1^0 = -1,3; \quad x_2^0 = -0,555; \quad y_1^0 \approx 1,68; \quad y_2^0 \approx 1,45; \quad (5)$$

Переключение между режимами интегрирования и задания начальных условий осуществляется с помощью специальных ключей. Для минимизации накапливаемых ошибок интегрирования процесс вычисления не должен превышать несколько секунд.

Итак, для генерации быстрого режима начальное условие переменной x_1 равнялось значению $-1,2$, а для медленного режима начальное условие равнялось значению $1,48$. На рисунке 2 показаны временные реализации обоих режимов на одной диаграмме. А на рисунке 3 показана фазовая картина медленного режима, полученная из схемотехнической модели. По этой картине четко видно, что данный режим соответствует случаю затухающего колебания. А на рисунке 4 показана фазовая картина этого же режима, полученная с помощью численного интегрирования в среде MatLab при ошибке интегрирования $0,0001$.

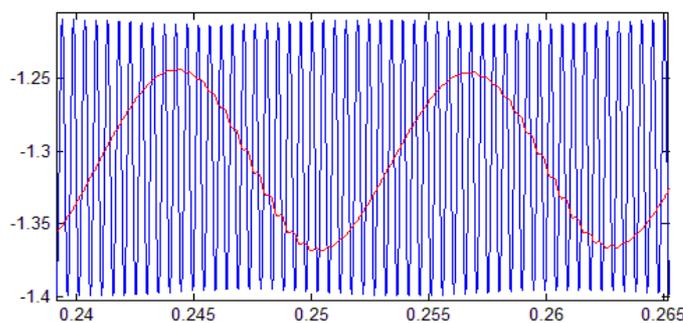


Рисунок 2 –
Временная реализация обоих режимов на одной диаграмме

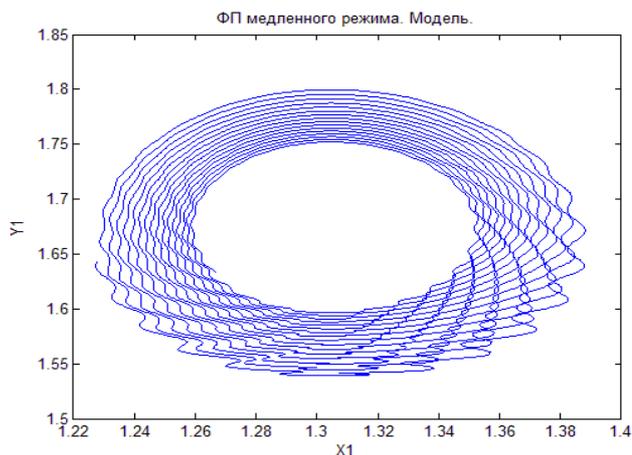


Рисунок 3 –
Фазовый портрет «медленного»
режима
из схемотехнической модели

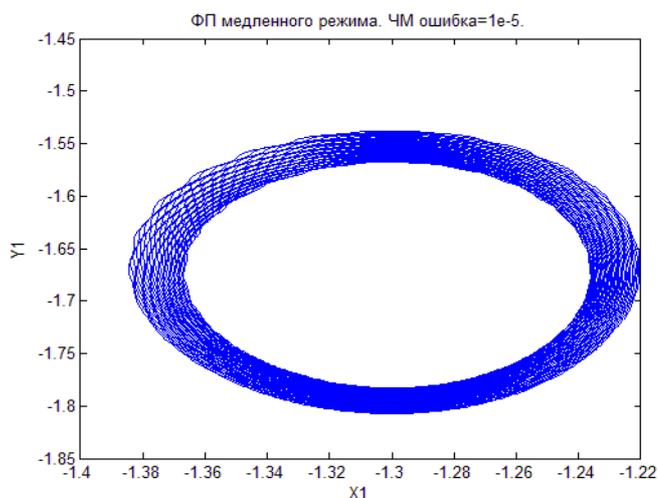


Рисунок 4 –
Фазовый портрет «медленного»
режима, полученного путем
численного решения системы
уравнений

Как видим, в данном случае численное интегрирование также дает затухающее колебание для «медленного» режима. Соответственно, можно сделать вывод, что отличие теории от результатов компьютерной модели связано только с высоким уровнем ошибки интегрирования в схемотехнической модели.

Заключение. На основе схемотехнического исследования динамики кластера, состоящего из двух линейно-отрицательно связанных автоколебательных систем, получены следующие результаты:

1. В схемотехнике «медленный» режим представляет собой затухающее колебание, а не предельный цикл, т.е. имеется отличие от теоретических выводов.

2. Отличие, обнаруженное между теорией и результатами схемотехнической модели, связано с высоким уровнем ошибки интегрирования в компьютерной модели, где учитываются характеристики реальных операционных усилителей и особенность интегрирующих цепей [3].

В целом выводы теории подтверждаются в компьютерной модели динамической системы. Для получения полноценного экспериментального подтверждения необходимо провести реальный физический эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1 Жанабаев З.Ж., Закс М., Медетов Б.Ж. Генерация сигналов кластером связанных двух автоколебательных систем на границе потери устойчивости равновесия, теория // Журнал ПЭОС. – Алматы, 2012.

2 Cronin Jane. Mathematical aspects of Hodgkin-Huxley neural theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

3 Фолькенберри Л. Применение операционных усилителей и линейных интегральных схем. – М.: Мир, 1985.

REFERENCES

1 Zhanabev Zh., Zaks M., Medetov B. Generatsya signalov klasterom svyazonnyh dvuh avtokolebatelnyh system na granitse poteri ustoychivosti ravnovesya. Teorya. // PEOS, vyp. 14, T 1, 2012 (in Russ).

2 Cronin Jane. Mathematical aspects of Hodgkin-Haxley neural theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

3 Luces M. Faulkenberry. Introduction to Operational Amplifiers with Linear Integrated Circuit Applications // John Wiley & Sons Inc. – 1982.

Резюме

Б. Ж. Медетов, А. Ж. Наурызбаева, Е. Есерханұлы

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

«ҚОСЖИІЛІКТІ» ХОПФ БИФУРКАЦИЯСЫН СХЕМОТЕХНИКАЛЫҚ ҮЛГІЛЕУ

Бұл жұмыста «қосжиілікті» Хопф бифуркациясын нақты физикалық жүйелерде байқау мүмкіндіктері зерттелінген. Бұл мақсатта multisim арнайы ақпараттық жүйе ортасында электрондық схеманың компьютерлік үлгісі жасалынып, осы үлгі көмегімен генерацияланған сигналдар зерттелінді. Құрастырылған электрондық схема автотербелмелі жүйелер кластерінің динамикасын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған. Схемотехникалық зерттеулер нәтижесі көрсеткендей, «қосжиілікті» Хопф бифуркациясы нақты физикалық жүйелерде байқалынуы әбден мүмкін. Теория мен үлгі арасында бір ғана айырмашылық анықталды – үлгіде «баяу» режим теориядағыдай шектік цикл емес, өшпелі тербеліс болып шықты. Дегенмен бұл айырмашылық теорияның дұрыстығын теріске шығармайды, ол тек компьютерлік үлгіде интегратордың ерекшелігі мен нақты микросхемалардың сипаттамалары ескерілгендіктен мүмкін болатын қателіктердің салдарынан пайда болған.

Кілт сөздер: Бифуркация, Хопф бифуркациясы, шектік цикл, сигнал, автотербелмелі жүйе, схемотехника, интегралды микросхема.

Summary

B. Medetov, A. Naurzbayeva, E. Eserkhanuly

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

CIRCUIT SIMULATION OF «TWO-FREQUENCY» HOPF BIFURCATION

In this paper we consider the possibility of finding "two-frequency" Hopf bifurcation in real physical systems. For this purpose, constructed a computer model of an electronic circuit in the environment multisim, with which was researched the generated signals. This electronic circuit performs the solution of differential equations describing the dynamics of the cluster self-oscillating system. Results of circuit studies have shown that the "two-frequency" Hopf bifurcation can be detected in real physical systems. The only difference is that the so-called "slow" mode actually was damped oscillation, not a limit cycle as predicted by the theory. But this difference is not a consequence of the theory was not correct, but only due to the high level of integration of the error in a computer model of an electronic circuit, which takes into account features of the integrators and the actual characteristics of integrated circuits.

Keywords: Bifurcation, Hopf bifurcation, limit cycle, signal, oscillatory systems, circuit design, integrated microcircuit.

Поступила 27.03.2013г