ЖОК 521.1

М.Ж. МЕҢЛІБАЕВ, М.Т. АБАЕВ

ХИЛЛ ЖУЫҚТАУЫНДАҒЫ МАССАЛАРЫ ӘРТҮРЛІ ЖЫЛДАМДЫҚТА ИЗОТРОПТЫ ӨЗГЕРЕТІН ҮШ ДЕНЕНІҢ ШЕКТЕУЛІ ЕСЕБІ

Хилл жуықтауындағы массалары әртүрлі жылдамдықта изотропты өзгеретін үш дененің шектеулі мәселесі қарастырылған. Гравитациялаушы екі дененің массалар қосындысы біріктірілген Мещерский заңы бойынша өзгереді, ал денелердің өзіндік массалары басқа заңмен өзгереді. Осы мәселенің кеңістіктегі Гаусс сүлбесі бойынша орташаланған жағдайы интегралданатыны көрсетілген.

Қазіргі кездегі астрономиялық зерттеулер ғарыштағы объектілердің эволюциясы, олардың массасы мен өлшемдерінің өзгеруімен қатар жүретіндігін көрсетіп отыр. Гравитациялаушы дененің массалары мен өлшемдерінің өзгеру салдары бейстационар жүйе эволюциясының негізгі факторларының бірі болып табылады [1-3]. Осыған байланысты массалары әртүрлі қарқынмен изотропты өзгеретін үш дене есебін қарастырамыз. Бұл жұмыста Хилл жуықтауындағы массалары әртүрлі жылдамдықта изотропты өзгеретін үш дененің Гаусс сүлбесі бойынша орташаланған шектеулі есебінің интегралданатын жағдайлары көрсетілген.

Қозғалыс теңдеулерін мына түрде жазамыз

$$\ddot{\vec{R}} = -f\frac{m_0 + m_1}{R_3}\vec{R}, \tag{1}$$

$$\ddot{\vec{r}} + fm_0\frac{\vec{r}}{r^3} = grad_{\vec{r}}W_1, \tag{2}$$

$$W_1 = fm_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xX + yY + zZ}{R^3}\right),$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\Delta = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}, \tag{3}$$

$$m_0 = m_0(t), \qquad m_1 = m_1(t), \qquad \frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1}. \qquad (4)$$

Гравитациялаушы екі дененің қозғалысын сипаттайтын (1)-ші Гюльден-Мещерский есебі, егерде денелердің массаларының қосындысы уақытқа байланысты Мещерскийдің жалпыланған заңдылығымен өзгерсе

$$m_0 + m_1 = (m_{00} + m_{10})\left[\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C}\right]^{1/2},$$

$$m_{00} = m_0(t_0), \qquad m_{10} = m_1(t_0) \qquad (5)$$

онда, (1)-ші теңдеудің дербес шешімі белгілі квазишеңберлік қозғалыспен анықталынады

$$R = a_1 / v, \qquad R^2\dot{\theta} = \sqrt{f(m_{00} + m_{10})a_1}, \qquad (6)$$

мұндағы,

$$v = \frac{m_0 + m_1}{m_{00} + m_{10}} = \left[\frac{At_0^2 + 2Bt_0 + C}{At^2 + 2Bt + C}\right]^{1/2}. \qquad (7)$$

Сол сияқты,

$$v_0 = \frac{m_0}{m_{00}}, \qquad v_1 = \frac{m_1}{m_{10}} \qquad (8)$$

деп белгілейміз. Қарастырып отырған массалары әртүрлі қарқынмен изотропты өзгеретін үш дененің шектеулі есебінің (2)-ші теңдеуі (6)-(7)-ші жағдайда квазиконустық қимадағы [4] апериодикалық қозғалыстық оскуляцияланушы элементтері

$$a, \quad e, \quad i, \quad \Omega, \quad \omega, \quad M \qquad (9)$$

бойынша ұйытқу қозғалысын Лагранж теңдеулері арқылы жазуға болады

$$\dot{a} = \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial W}{\partial M},$$

$$\dot{e} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\cdot\frac{\partial W}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial W}{\partial \omega},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{ctg\, i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial W}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial W}{\partial \Omega}, \qquad (10)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial W}{\partial i},$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial W}{\partial M} - \frac{ctg\, i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial W}{\partial i},$$

$$\dot{M} = n[v_0(t)]^2 - \frac{2}{na}\frac{\partial W}{\partial M} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial W}{\partial M},$$

мұндағы

$$W = W_1 + W_2, \qquad W_2 = -\frac{1}{2}v_0\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{v_0}\right)r^2. \qquad (11)$$

Хилл жуықтауы бойынша шектеліп

$$r << R \qquad (12)$$

ньютон потенциалының негізгі бөлшегін қабылдаймыз

$$W_1 = f\frac{m_1}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos S), \qquad (13)$$

бұл жағдайда Гаусс сүлбесі бойынша екі ретті орташаланған (10)-шы функция мына түрге келеді

$$W^* = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} W dM_1 dM = v^3\frac{v_1}{v_0^2}(W_1^* - kW_2^*), \qquad (14)$$

мұндағы,

$$k = k(t) = \left[\frac{v_0}{v_1\cdot v^3}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{v_0}\right)\right]. \qquad (15)$$

Егерде, $k = const$ деп қабылдасақ (10)-шы ұйтқыған теңдеулер жүйесін автономды теңдеулер жүйесіне келтіруге болады. Бұл жағдайда (14)-ші өрнек мына түрге келеді

$$W^* = v^3\frac{v_1}{v_0^2}(W_1^* - k_0 W_2^*), \qquad (16)$$

$$W_1^* = \frac{fm_{10}a^2}{8a_1^2}\left[6e^2 - 1 - 15e^2\sin^2\omega + \right.$$
$$\left. + 3\cos^2 i\left(5e^2\sin^2\omega + 1 - e^2\right)\right], \qquad (17)$$

$$W_2^* = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right), \qquad (18)$$

$$\left[\frac{v_0}{v_1\cdot v^3}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{v_0}\right)\right] = k_0 = const. \qquad (19)$$

Сонымен екі рет орташаланған (10)-шы Лагранж теңдеулер жүйесі мына түрге келеді

$$\frac{da}{d\tau} = 0$$

$$\frac{de}{d\tau} = \frac{15fm_{10}}{8a_1^3}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{n}\cdot e\sin^2 i\sin 2\omega,$$

$$\frac{di}{d\tau} = -\frac{15fm_{10}}{16a_1^3}\cdot\frac{e^2}{n\sqrt{1-e^2}}\cdot\sin^2 i\sin 2\omega$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{15fm_{10}}{4a_1^3}\cdot\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\cdot\left\{\frac{2}{5}(1-e^2) + \right.$$
$$\left. + \sin^2\omega\left[\cos^2 i - (1-e^2)\right] - k\frac{2}{5}\left(\frac{a_1^3}{fm_{10}}\right)(1-e^2)\right\},$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau}=-\frac{3fm_{10}}{4a_1^3}\cdot\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\cdot\cos i\left(5e^2\sin^2\omega+1-e^2\right) \quad (20)$$

$$\frac{dM}{d\tau}=n-\frac{2}{n}\left\{\frac{fm_{10}}{4a_1^8}\left[6e^2-11-15e^2\sin^2\omega+\right.\right.$$
$$\left.\left.+3\cos^2 i\left(5e^2\sin^2\omega+1-e^2\right)\right]\right\}-$$
$$-\frac{1-e^2}{n}\left\{\frac{fm_{10}}{4a_1^3}\left[6-15\sin^2\omega+3\cos^2 i\left(5\sin^2\omega-1\right)\right]\right\},$$

$$\frac{dM}{d\tau}=n-\frac{2}{n}\left\{\frac{fm_{10}}{4a_1^8}\left[6e^2-11-15e^2\sin^2\omega+\right.\right.$$
$$\left.\left.+3\cos^2 i\left(5e^2\sin^2\omega+1-e^2\right)\right]\right\}-$$
$$-\frac{1-e^2}{n}\left\{\frac{fm_{10}}{4a_1^3}\left[6-15\sin^2\omega+3\cos^2 i\left(5\sin^2\omega-1\right)\right]\right\},$$

мұндағы

$$d\tau=v^3\frac{v_1}{v_0^2}dt \quad (21)$$

Ал, (19)-шы шарттан $v_0=v_0(t)$ фунциясын анықтайтын теңдеу аламыз

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{v_0}\right)=k^*v^3\left(\sigma\frac{v}{v_0}-1\right),$$

$$k^*=\frac{m_{00}}{m_{10}}k_0,\qquad \sigma=\frac{m_{00}+m_{10}}{m_{00}}. \quad (22)$$

болғандықтан, сәйкесінше (7)-(8) қатынастарынан $m_0(t)$, $m_1(t)$, анықталады

$$m_0=m_{00}v_0(t),$$
$$m_1=m_{10}\left[\left(\frac{m_{00}+m_{10}}{m_{10}}\right)\left(\frac{At_0^2+2Bt_0+C}{At^2+2Bt+C}\right)^{1/2}-\frac{m_{00}}{m_{10}}v_0(t)\right], \quad (23)$$

бұл жердегі $v_0=v_0(t)$ функциясы (22) теңдеу шешімі болып табылады.

Қарастырылып отырған (19)-шы жағдайда автономды Лагранж теңдеулер жүйесі интегралданады, шешім сәйкес стационар есеп сияқты [5] эллипстік квадратураға келеді. Жүйенің мына интегралдарын

$$a=a_0=const,\qquad \left(1-e^2\right)\cos^2 i=const \quad (24)$$

$$e^2\left(\frac{2}{5}N-\sin^2\omega\sin^2 i\right)=c_2=const,\qquad N=1-\frac{a_1^3}{fm_{10}}\cdot k_0, \quad (25)$$

пайдаланып (20)-шы теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуін мына түрде жазуға болады

$$\frac{dz}{d\tau}=\frac{15fm_{10}}{4a_1^3n}\sqrt{N_1z-c_2}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{(N_1-1)z^2+(1-c_1-c_2-N_1)z+c_2}, \quad (26)$$

(26)

мұндағы

$$e^2=z,\qquad N_1=\frac{5N}{2},\qquad n=\sqrt{\frac{fm_{10}}{a_0^3}}.$$

Бұл шешімнің сәйкес стационар есептен ерекшелігі, тұрақты $N\neq 1$ – параметрі қарастырылған мәселедегі массаларының өзгеру заңдылығын сипаттайды.

Эллипстік интегралды есептеп $e^2=z=z(\tau)$ табылғаннан соң қалған оскуляциялаушы элементтерді (24), (25) интегралдарынан табамыз. Табылған шешім, қарастырылған мәселедегі қозғалысты толық зерттеуге мүмкіншілік береді.

Массалардың заңдылығын анықтайтын (22)-ші теңдеуді мына түрде жазамыз

$$\ddot{y}+\frac{E_1}{\left(At^2+2Bt+C\right)^2}y=g(t), \quad (27)$$

мұндағы

$$y=\frac{1}{v_0},\qquad g(t)=\frac{E_2}{\left(At^2+2Bt+C\right)^{3/2}},$$

$$E_1=const,\ E_2=const, \quad (28)$$

Сондықтан да (27)-ші теңдеу шешімі мына түрде жазылады

$$y=y(t)=y_2\int\frac{y_1}{G}gdt-y_1\int\frac{y_2}{G}gdt+c_3y_1+c_4y_2; \quad (29)$$

$$G=G(t)=y_1\dot{y}_2-\dot{y}_1y_2, \quad (30)$$

y_1, y_2 – (27)-ші теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің фундаменталдық шешімдері [6], c_3, c_4 - тұрақты шамалар. Бірақ та қарастырылған жағдайда Хилл жуықтығын сипаттайтын (12)-ші шарт массалардың өзгеру заңдылығына белгілі дәрежеде шектеу жасайды.

Бұдан ары қарай қарастырылған мәселені зерттеуді дамыту барысында басқа да орташалау сүлбелерін пайдалану көзделуде.

Жұмыс іргелі зерттеулер бағдарламасы бойынша орындалған, шифр – 0351.

Әдебиет

1. *Омаров Т.Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 144 с.

2. *Omarov T.B.* (Editor) Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002, 260 p.

3. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astronomical and Astrophysical Transactions. 2003. Vol.22. p 145-153.

4. *Минглибаев М.Ж.* К канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы // Труды АФИ АН КазССР. Алма-Ата: Ғылым, 1992. Т.50. С. 71-78.

5. *Вашковьяк М.А.* Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел 1. Качественное исследование // Космич. исслед. 1981. Т.19, С. 5-18.

6. *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. Ижевск: НИЦ РХЦ, 2002. 464 с.

Резюме

Рассматривается ограниченная задача трех тел с переменными массами, когда массы активно гравитирующих тел изменяются изотропно в различных темпах. При этом суммарная масса активно гравитирующих тел изменяется со временем по объединенному закону Мещерского, а индивидуальная масса каждого тела по другим законам. Показана интегрируемость пространственной задачи осредненной по схеме Гаусса в приближении Хилла.

Summary

The limited problem of three bodies with variable mass, when mass of actively gravitated bodies change isotropically in different rates. Herewith the total mass of these bodies is changed in time according to the united law of Metschersky, but the individual mass of each body changes according to other laws. The integrability of the spatial average problem in accordance with the Gaussa's scheme in Hill's approach is shown in this work.

В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты, Алматы

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университеті, Алматы