УДК 521.1

М. Ж. МИНГЛИБАЕВ, А. А. НҰРҒАЗИНОВА, Ч. Т. ОМАРОВ

БЕЙСТАЦИОНАР ӨСТІК СИММЕТРИЯЛЫ СЕРІКТІҢ ІЛГЕРІЛЕМЕЛІ-АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ШЕКТЕЛГЕН МӘСЕЛЕСІ

Серіктің шектеулі айналмалы-ілгерілемелі қозғалысы қарастырылып, оның инерция центрі квазиэллипстік орбитада апериодты қозғалады деп қабылданған. Бейстационар өстік симметриялы серіктің өзіндік инерция центрінің маңайындағы айналмалы қозғалыс теңдеуі Белецкий–Черноусько айнымалыларына ұқсас айнымалылар жүйесінде сипатталынады. Осы айнымалылардың толық ғасырлық ұйтқуы табылған.

Кіріспе. Ғарыштағы нақты аспан денелері негізінде бейстационар болып келеді. Уақыт өте келе олардың массалары, өлшемдері және пішіндері өзгереді [1-5]. Құрамына мұндай аспан денелері енетін гравитациялаушы жүйелер динамикалық эволюциясы олардың айналмалы-ілгерілемелі қозғалысымен сипатталады. Жалпы жағдайда мұндай жүйелерді зерттеу күрделі. Сондықтанда бұл жұмыста екі дененің айналмалы-ілгерілемелі қозғалысын дербес жағдайда шектелген қойылымда зерттейміз.

Мәселенің қойылуы. Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде массасы $m_1 = m_1(t)$ шамасымен сипатталынатын бейстационар шардың өрісіндегі, динамикалық құрылымды өстік симметриялы бейстационар массасы $m_2 = m_2(t)$, серіктің айналмалы қозғалысын қарастырайық. Серіктің екінші ретті инерция моменттері айнымалы болады:

$$A(t) = B(t) \neq C(c). \qquad (1)$$

Сонымен қатар серіктің инерция өстерінің ориентациясы өзіндік координаталар жүйесімен сәйкес келеді және осы жағдай өзгеріссіз қалады деп қабылдаймыз. Денелердің массалары әртүрлі қарқында изотропты өзгерсін.

Онда серіктің инерция центрі шардың инерция центріне қатысты ілгерілемелі қозғалысы мына теңдеулер жүйесімен беріледі

$$\nu\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \nu\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \nu\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (2)$$

мұндағы $\nu = \nu(t) = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – келтірілген масса,

$$U = f m_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{R^{n+1}} = f m_1 \left[\frac{m_2}{R} + \frac{U_2}{R^3} + \ldots \right],$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (3)$$

– екі дененің Ньютон заңымен әсерлесетін тартылыс күшін анықтайтын күштік функция; f – гравитациялық тұрақты. Ал серіктің айналмалы қозғалыс теңдеулерін әртүрлі айнымалылар арқылы сипаттауға болады [5].

Бұл жұмыста мәселенің шектелген қойылымын қарастырамыз. Серіктің массалар центрі қозғалысын, оның өзіндік инерция центрі маңындағы айналмалы қозғалыстан бөлек қарастыруға болады деген болжам қабылдаймыз. Бұл жағдайда күштік функция (3)-ші өрнегінде тек бірінші мүшемен шектелеміз.

Сонымен серіктің ауырлық центрі қозғалысы Гюльден-Мещерский мәселесімен [1] өрнектелінеді. Бұл жағдайда (2)-теңдеу мына түрге келеді

$$\ddot{x} = -f \frac{m}{R^3} x, \quad \ddot{y} = -f \frac{m}{R^3} y, \quad \ddot{z} = -f \frac{m}{R^3} z. \qquad (4)$$

$$m = m(t) = m_1(t) + m_2(t),$$

$$m_0 = m(t_0) = m_1(t_0) + m_2(t_0), \qquad (5)$$

t_0 – бастапқы уақыт моменті. Массаның (5)-шы өрнегіне сәйкес кез келген заңдылықтарда (4)-ші теңдеудің жалпы шешімі белгісіз [6]. Сондықтан (4), (5)-шы теңдеулердің жалпы жуық шешімін ұйтқу теориясы әдісімен анықтаймыз.

Гюльден-Мещерский есебін (4)-ші қозғалыс теңдеуіне сәйкес эллипс бойындағы үйтқыған апериодты қозғалыс теңдеуі деп қарастырамыз. Бұл жағдайды алғаш рет Т. Б. Омаров [7] және J. D. Hadjidemetriou [8] ұсынған. Онда оскуляциялаушы элементтердегі қозғалыс теңдеуі кеңінен танымал мына түрге келеді [1, 5, 9].

$$\dot{a}_2 = -\frac{a_2(1+2e_2\cos\upsilon_2 + e_2^2)}{1-e_2^2}\frac{\dot{m}}{m},$$

$$\dot{e}_2 = -(e_2+\cos\upsilon_2)\frac{\dot{m}}{m}, \quad \dot{\omega}_2 = -\frac{\sin\upsilon_2}{e_2}\frac{\dot{m}}{m}, \quad (6)$$

$$\dot{\upsilon}_2 = \sqrt{\frac{fm}{a_2(1-e_2^2)}}\frac{(1+e_2\cos\upsilon_2)^2}{a_2(1-e_2^2)} + \frac{\sin\upsilon_2}{e_2}\frac{\dot{m}}{m},$$

$$i_2 = i_{20} = const, \qquad \Omega_2 = \Omega_{20} = const.$$

Егер (6) теңдеулердің оң жағын тізбекке жіктеп, уақытқа байланысты жылдам өзгеретін айнымалы бойынша орташаласақ, онда орташаланған ғасырлық үйтқуды анықтайтын дифференциалдық теңдеулер шешімін келесі қарапайым түрде жазуға болады

$$a_{2гас}\frac{m(t)}{m(t_0)} = a = const, \quad e_{2гас} = e = const, \quad (7)$$

$$\omega_{2гас} = \omega = const, \qquad \Omega_2 = \Omega_{20} = \Omega = const,$$

$$i_2 = i_{20} = i = const. \quad (8)$$

Мына $\upsilon = \upsilon_{2гас} = \theta_{2гас} - \omega$ белгілеуді енгіземіз. Онда (4), (5) теңдеулерінің шешімі (7), (8)-шы жуықтауы арқылы мына түрде болады

$$R = \frac{m(t_0)}{m(t)}\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\upsilon},$$

$$\dot{\upsilon} = \left(\frac{m(t)}{m(t_0)}\right)^2 \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}}(1+e\cos\upsilon)^2,$$

$$n = \frac{\sqrt{fm(t_0)}}{a^{3/2}}. \quad (9)$$

Соңғы (9)-шы өрнек серіктің инерция центрі ілгерілемелі қозғалысын анықтайды.

Сонымен бұл мәселеде инерция центрі (9)-шы формулаға сәйкес ілгерілемелі қозғалыс жасайтын бейстационар, осьтік симметриялы серіктің өзіндік инерция центрі маңындағы айналмалы қозғалысы зерттелінеді.

Айналмалы қозғалыстың үйтқыған теңдеуі. Серіктің өзіндік инерция центрінің маңайында айналмалы қозғалысын Белецкий–Черноусько айнымалыларына ұқсас айнымалылар [5, 10] арқылы сипаттаймыз

$$L, \ \rho, \ \sigma, \ \theta, \ \varphi, \ \psi. \quad (10)$$

Инерция центрі (9)-шы квазиэллипстік орбитада апериодты қозғалатын серіктің айналмалы-ілгерілемелі қозғалысын зерттеуде $U-$ күштік функциясының келесі

$$U = fm_1\left[\frac{m_2}{R} + \frac{U_2}{R^3}\right] =$$

$$= \frac{fm_1(t)m_2(t)}{R} + \frac{fm_1(t)}{2R^3}\left[C(t) - A(t)\right] + W$$

жуық өрнегімен шектелеміз.

Қабылданған (7)–(9) өрнектерін «перигейлі» координата жүйесінде қарастырамыз [11]. Бұл жағдайда үйтқушы күштік функцияны оскуляциялаушы элементтер арқылы өрнектеу сәйкес стационар мәселедегі сияқты [5, 11]. Үйтқушы күштік функцияның айналмалы қозғалыс оскуляциялаушы элементтерін қамтитын бөлігі төмендегіше

$$W = \frac{3fm_1(t)}{2R^3}\left\{\left[A(t) - C(t)\right]\gamma_3^2\right\}, \quad (11)$$

$$\gamma_3 = \sin\rho\cos\theta\cos S - \frac{1}{2}\sin\varphi(1-\cos\rho)\cos(\psi+S) +$$

$$+\frac{1}{2}\sin\theta(1+\cos\rho)\sin(\psi - S),$$

$$S = \upsilon - \sigma. \quad (12)$$

Айналмалы үйытқыған қозғалыс теңдеуі мәселенің қойылуына сәйкес келесі түрде жазылады:

$$\dot{L} = \frac{\partial W}{\partial\psi}, \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{L\sin\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\right),$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{L\sin\rho}\left(-\frac{\partial W}{\partial\sigma} + \cos\rho\frac{\partial W}{\partial\psi}\right),$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial W}{\partial\psi}\right),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{L\sin\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right) + \left(\frac{1}{C(t)} - \frac{1}{A(t)}\right)L\cos\theta, \quad (13)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L}{A(t)} - \frac{1}{L}\left(\frac{\partial W}{\partial\rho}ctg\rho + \frac{\partial W}{\partial\theta}ctg\theta\right).$$

Соңғы жүйеде φ-циклдік айнымалы, сондықтан да

$$L\cos\theta = \text{const}. \qquad (14)$$

Ұйтқымаған айналмалы қозғалыс теңдеуі – Уиттекер теңдеуі

Қарастырылған мәселеде (1)-шарт орындалған кезде ұйтқымаған айналмалы қозғалыс теңдеуі – Уиттекер теңдеуі оңай интегралданады. Бұл жағдайда

$$\dot{L} = 0, \quad \dot{\rho} = 0, \quad \dot{\sigma} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \qquad (15)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_0}{A(t)}, \quad \dot{\phi} = \frac{A(t) - C(t)}{A(t)\cdot C(t)} L_0 \cos\theta_0, \qquad (16)$$

мұндағы $A(t)$, $C(t)$ – берілген, белгілі уақытқа тәуелді функциялар.

Ұйтқымаған қозғалыс теңдеуіндегі (16)-өрнегінен $\dot{\phi}$ -меншікті айналу бұрыштың бұрыштық жылдамдығының таңбасы өзгеретінін көруге болады.

Ғасырлық ұйытқу. Ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстардың арасында резонанс жоқ деп есептейік. Онда ұйытқытушы функцияның толық ғасырлық бөлігі Гаусс әдісі бойынша анықталады

$$\widetilde{\widetilde{W}} = \frac{3fm_1(t)\left[A(t) - C(t)\right]}{8\gamma^3(t)a^3(1-e^2)^{3/2}} \times$$

$$\times \left\{2\sin^2\theta_0 + (3\cos^2\theta_0 - 1)\sin^2\rho_0\right\},$$

$$\gamma(t) = \frac{m(t_0)}{m(t)}. \qquad (17)$$

Ұйытқытушы күштік функцияның соңғы өрнегін пайдаланып, (13)-ші теңдеулер жүйесінен төмендегі өрнектерді аламыз

$$L_{гас} = L_0 = const, \quad \rho_{гас} = \rho_0 = const,$$

$$\theta_{гас} = \theta_0 = const, \qquad (18)$$

$$\dot{\sigma}_{гас} = \frac{3f\left(3\cos^2\theta_0 - 1\right)\cos\rho_0}{4a_0^3\left(1 - e_0^2\right)^{3/2} L_0} \times$$

$$\times \frac{\left(C(t) - A(t)\right)m_1(t)}{\gamma^3(t)} = \dot{\sigma}_{гас}(t), \qquad (19)$$

$$\dot{\phi}_{гас} = \left[\frac{3f\left(2 - 3\sin^2\rho_0\right)\cos\theta_0}{4a_0^3\left(1 - e_0^2\right)^{3/2} L_0} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{m_1(t)}{\gamma^3(t)} + \frac{L_0\cos\theta_0}{C(t)\cdot A(t)}\right]\left(A(t) - C(t)\right) = \dot{\phi}_{гас}(t), \qquad (20)$$

$$\dot{\psi}_{гас} = \frac{L_0}{A(t)} + \frac{3f}{4a_0^3(1 - e_0^2)^{3/2} L_0} \times$$

$$\times\left[\cos^2\theta_0 + \cos^2\rho_0 - 6\cos^2\theta_0\cos^2\rho_0\right]\times$$

$$\times \frac{(A(t) - C(t))m_1(t)}{\gamma^3(t)} = \dot{\psi}_{гас}(t). \qquad (21)$$

бейстационарлығын қарастыруға болады. Бірінші жағдайда, массасы айнымалы және тұрақты пішінді өстік симметриялы дененің өлшемінің гомотетиялық өзгеруі мүмкін. Екінші жағдайда, өстік симметриялы дененің бейстационарлығы өлшемінің, массасының және сығылудың айнымалылығымен бейнеленеді

$$\frac{A(t) - C(t)}{A(t)} \neq const, \qquad (22)$$

мұндағы $A(t)$ және $C(t)$ –уақытқа тәуелді функциялар. Бұл жағдайда, өзгермелі инерция эллипсоиды сферадан өткен кезде, меншікті бұрыштық жылдамдық $\dot{\phi}_{век}$ нольге тең және келесі уақыт моментінде таңбасын ауыстырады. Осыған сәйкес бейстационар өстік симметриялы дене кері қарай айнала бастайды. Өстік симметриялы бейстационар дененің бұл маңызды қозғалыс сипаттамасы ұйтқымаған қозғалыста да (16) болған. Ал, йтқыған қозғалыста меншікті бұрыштық жылдамдықтың өрнегі басқаша болса да, (20) формуласына сәйкес, бұл қасиеттің сақталатынын көреміз.

ӘДЕБИЕТ

1. *Омаров Т.Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики. Алма-Ата, 1975. 144 с.

2. *Omarov T.B.* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002. P. 260.

3. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astronomical and Astrophysical Transactions. 2003. V. 22. P. 145-153.

4. *Лукьянов Л.Г.* Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. ж. М.: Наука, 2008. Т. 85, № 8. С. 755-768.

5. *Минглибаев М.Дж.* Динамика нестационарных гравитирующих систем. Алматы: Изд-во Каз. нац. ун-та, 2009. С. 209.

6. *Berkovic L.M.* Gylden-Mescerskii problem // Celect. Mech. 1981. V. 24, N 4. P. 407-429.

7. *Омаров Т.Б.* О движении двух тел с корпускулярным излучением // Астр. ж. 1963. Т. 40, вып. 4. С. 921-928.

8. *Hadjidemetriou J.D.* Two-body problem with variable mass: a new approach // Icarus. 1963. V. 2. P. 440-453.

9. *Hadjidemetriou J.D.* Secular variation of mass and the evolution of binary systems // Advances in Astronomy and Astrophysics. N-Y. L. Acad. Press. 1967. V. 5. P. 131-188.

10. *Минглибаев М.Ж.* К вращательному движению нестационарного тела // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2006. № 4. С. 10-13.

11. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1975. С. 308.

Резюме

Рассматривается ограниченная постановка задачи о поступательно-вращательном движении нестационарного осесимметричного спутника. Движение центра инерции происходит по квазиэллиптической орбите апериодически. Вращательное движение спутника вокруг собственного центра инерции описывается аналогами переменных Белецкого–Черноусько. Получены аналитические выражения полных вековых возмущении.

Summary

The investigation deals with the restricted problem of translational-rotational motion of a non-stationary, axisymmetric body. The inertia center motion is covered aperiodically on a quasi-elliptic orbit. The rotational motion of the satellite around its own center of inertia is described analogs variables Beletsky–Chernousko. The analytical expressions of secular perturbations are derived.

«В. Г. Фесенков ат. Астрофизика институты» ЕЖШС. Алматы қ.;

әл-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті

Түскен күні20.04.2010ж.