

БЕЙСТАЦИОНАР ЭЛЛИПСОИД ӨРІСІНДЕГІ МАТЕРИАЛДЫҚ НҮКТЕ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ҒАСЫРЛЫҚ ҰЙТҚУЫ

Материалдық нүктенің гравитациялаушы және кедергілі ортада массасы, өлшемі және пішіні айнымалы үш өсті эллипсоид гравитация өрісіндегі қозғалысы қарастырылған. Ғасырлық ұйтқудың дифференциалық теңдеуінің толық шешімі алынған.

Кіріспе. Үш өсті эллипсоидтың тартылыс өрісіндегі материалдық нүктенің қозғалысы – аспан механикасындағы өзекті мәселелердің бірі болып табылады [1-3]. Осы жұмыста бейстационар эллипсоид өрісіндегі нүктенің гравитациялаушы және кедергілі ортадағы қозғалысы зерттелінеді. Центрілік үш өсті эллипсоидтың потенциалын сәйкес координаталар жүйесінде [3] мына өрнекпен сипаттаймыз

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \delta) + 3C_{22} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos 2\lambda (1 - \sin^2 \delta) \right\}, \quad (1)$$

мұндағы f – гравитациялық тұрақты, r , δ және λ материалдық нүктенің сфералық координаталары, $m = m(t)$ және $R = R(t)$ эллипсоидтың массасы мен орташа экваторлық радиусы уақытқа байланысты өзгермелі, $J_2 = J_2(t)$, $C_{22} = C_{22}(t)$ – дене пішіні мен құрылымының сипаттамалары.

Ғасырлық ұйтқу теңдеуі. Лездік элементтермен ғасырлық ұйтқудың Лагранж теңдеулері төмендегіше жазылады [4, 5]

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0, & \dot{e} &= 0, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial V_{\text{ғасыр}}}{\partial \Omega}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V_{\text{ғасыр}}}{\partial i}, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial V_{\text{ғасыр}}}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V_{\text{ғасыр}}}{\partial i}, \quad (2) \\ \dot{M} &= \gamma^2 \cdot n - \frac{2}{na} \frac{\partial V_{\text{ғасыр}}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial V_{\text{ғасыр}}}{\partial e}, \end{aligned}$$

мұндағы

$$V_{\text{ғасыр}} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \left[\varepsilon \int_0^t \alpha(t) dt \right] \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{4}{3} \pi \alpha \right\} \times$$

$$\times a^2 \gamma^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) + \frac{1}{2} \frac{fmR^2}{\gamma^3 a^3} (1 - e^2)^{-3/2} \times$$

$$\times \left[J_2 + \left(-\frac{3}{2} J_2 + 3C_{22} \cos 2\Omega \right) \sin^2 i \right], \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{m(t_0)}{m(t)} \exp \left[-2 \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \right],$$

мұндағы $\alpha(t)$ – біртекті орта тығыздығы; $\varepsilon = \text{const}$ – пропорционалдық коэффициент, $\pi \approx 3,14$.

Интегралданатын дербес жағдайлар. Денені сипаттайтын бейстационар эллипсоидтың параметрлеріне қатысты екі жағдайда (2)-ші теңдеулер жүйесі интегралданады.

Бірінші жағдайда мына

$$\frac{A(t)}{A(t_0)} = \frac{B(t)}{B(t_0)} = \frac{C(t)}{C(t_0)} \quad (4)$$

шарттар орындалсын [4], мұндағы $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$ бейстационар эллипсоидтың екінші ретті инерция моменттері. Бұл жағдайда дене өлшемі гомотетиялы өзгереді, ал пішіні тұрақты, сондықтан да $J_2 = J_2(t_0) = \text{const}$, $C_{22} = C_{22}(t_0) = \text{const}$.

Екінші жағдайда

$$\frac{C_{22}(t)}{J_2(t)} = \frac{B(t) - A(t)}{2[2C(t) - (A(t) + B(t))]} =$$

$$= \chi = \text{const} \neq 0,$$

$$\chi = \frac{C_{22}(t_0)}{J_2(t_0)}, \quad (5)$$

шарты орындалсын. Соңғы (5)-ші шартты мына түрде жазуға болады

$$\frac{A(t) - C(t)}{A(t) - B(t)} = \frac{1 + 2\chi}{4\chi} = \text{const},$$

$$1 - 2\chi \neq 0. \quad (6)$$

Сонымен (4)-ші немесе (6)-ші шарттары орындалғанда (2)-ші теңдеу жүйесінен мына интегралды табуға болады

$$(1 - 2\chi \cos 2\Omega) \sin^2 i = h,$$

$$h = (1 - 2\chi \cos 2\Omega_0) \sin^2 i_0. \quad (7)$$

Эллипсоид сығылған дене (Жер сияқты) деп қарастырамыз. Бұл жағдайда $\chi > 0$.

Келтірілген (2)-ші теңдеулер жүйесінің екінші теңдеуінен (7)-ші интегралды ескере мына теңдеуді аламыз

$$\Omega' = \frac{d\Omega}{d\tau} = \sqrt{1 - 2\chi \cos 2\Omega} \cdot \sqrt{1 - h + 2\chi \cos 2\Omega}, \quad (8)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{-3J_2 fmR^2}{2na^2 (1 - e^2)^2 \gamma^3 a^3}. \quad (9)$$

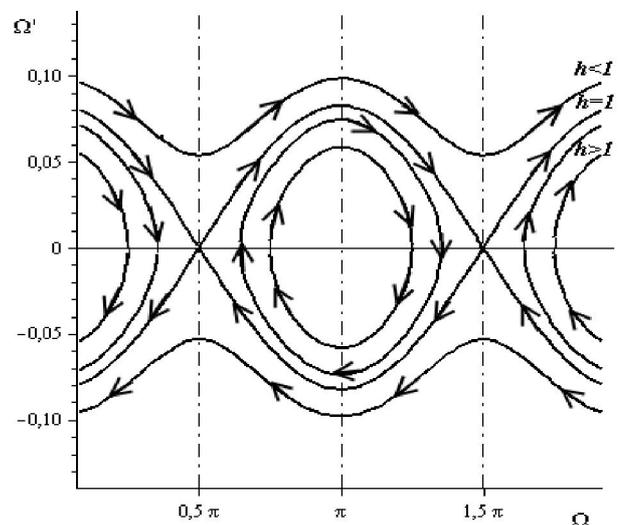
Фазалық портрет. (8)-ші теңдеуден (Ω', Ω) фазалық жазықтығында қозғалыс суретін қарастырайық. Табылған (7)-ші интегралдағы h үшін келесі жағдайларды қарастырайық

$$h < 1, \quad (10)$$

$$h = 1, \quad (11)$$

$$h > 1. \quad (12)$$

Келтірілген әр h үшін (8)-ші өрнекке сәйкес фазалық суретін құрайық. Сығылған дене үшін $A_0 < B_0$, $A_0 + B_0 < 2C_0$ орындалады. Төменде (Ω', Ω) – фазалық жазықтығындағы қозғалыс суреті көрсетілген. Бұл жағдайда мысал ретінде центрдегі дене Жер сияқты деп $J_{20} = 1.082 \cdot 10^{-3}$, $C_{220} = 1.8 \cdot 10^{-6}$ мөндерін қабылдаймыз. Ал материалдық нүкте үшін $\Omega_0 = 45^\circ$, $i_0 = 30^\circ$ деп қабылдаймыз онда (5)-ші шарттан $\chi = 1,7 \cdot 10^{-3}$, ал (7)-ші өрнектен бастапқы $h = 0,25$ табамыз.



$\Omega = 0, \Omega = \pi$ нүктелері орнықты стационар – тепе-теңдік нүктесін анықтайды, ал $\Omega = \frac{\pi}{2}$,

$\Omega = \frac{3\pi}{2}$ нүктелері орныксыз стационар – тепе-

теңдік нүктелерін анықтайды. (12)-ші теңсіздікті қанағаттандыратын h үлкен болған жағдайда қозғалыс ротациялы, яғни орнықты тепе-теңдік аймақты қамтиды. Ал (10)-ші теңсіздікке сөйкес h кіші болған жағдайда қозғалыс периодты болады, яғни орныксыз тепе-теңдік аймақты қамтиды.

Ал h (11)-ші теңдікті қанағаттандырса онда h екі түрлі қозғалысты шекаралайтын сепаратрисаны анықтайды, мұнда $h = 0.9966 \approx 1, \Omega' = 0,$

$\Omega = \frac{\pi}{2}, \Omega = \frac{3\pi}{2}$ болады. Жалпы жағдайда қоз-

ғалыс ротациялы және периодты болады, ал сепаратрисадағы қозғалыс ерекше болып табылады.

Эллиптикалық интегралды есептеу. (8)-ші теңдеуді келесі түрде жазайық

$$\int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{d\Omega}{\sqrt{(1+q \sin^2 \Omega)(1+p \sin^2 \Omega)}} = H_1(\tau - \tau_0), \quad (13)$$

мұндағы

$$q = \frac{4\chi}{1-2\chi} > 0, \quad p = \frac{-4\chi}{1-h-2\chi} < q,$$

$$H_1 = \sqrt{(1-2\chi)(1-h+2\chi)},$$

$$\tau - \tau_0 = \frac{-3f}{2na^5(1-e^2)^2} \int_0^{\tau} \frac{J_2(t)m(t)R^2(t)}{\gamma^3(t)} dt.$$

(13)-ші өрнек эллиптикалық интеграл.

1. $h < 1, k^2 = \frac{q-p}{1+q} < 1$. Эллиптикалық ин-

тегралдың k модулін енгізіп интегралды келесі түрде жазамыз:

$$k = \sqrt{\frac{q-p}{1+q}}, \quad F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}},$$

$$K(k) = F(\pi/2, k).$$

2. $h > 1, k^2 = \frac{q-p}{1+q} > 1$ немесе $k_1^2 = \frac{1}{k^2} < 1$.

Эллиптикалық интегралдың k_1 модулін енгізіп интегралды келесі түрде жазамыз:

$$k_1 = \sqrt{\frac{1+q}{q-p}}, \quad F(\varphi, k_1) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k_1^2 \sin^2 \varphi)}},$$

$$K(k_1) = F(\pi/2, k_1).$$

$F(\varphi, k), F(\varphi, k_1), K(k), K(k_1)$ – бірінші текті толық емес және толық интегралдар. Орталық дененің өрісіндегі материалдық дене қозғалысының сипаты k және k_1 параметрлердің мәндеріне тәуелді.

Алынған (13)-ші интегралды келесі түрде жазамыз

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} = H(\tau - \tau_0),$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k_1^2 \sin^2 \varphi)}} = H(\tau - \tau_0), \quad (14)$$

мұндағы $\varphi, \varphi_0, k^2, k_1^2, H$ – шамалары h мәніне байланысты төмендегі кестеден анықталады [6, 7]:

	H	$\sin \varphi$	$\sin \varphi_0$	k^2
1. $h < 1$	$H_1 \sqrt{(1+p)}$	$\frac{(1+p)^{1/2} \sin \Omega}{(1+p \sin^2 \Omega)^{1/2}}$	$\frac{(1+p)^{1/2} \sin \Omega_0}{(1+p \sin^2 \Omega_0)^{1/2}}$	$\frac{q-p}{1+q}$
	H	$\sin \varphi$	$\sin \varphi_0$	k_1^2
2. $h > 1$	$H_1 \sqrt{(1+p)} \cdot \left(\frac{q-p}{1+q} \right)$	$\frac{1+q}{q-p} \frac{(1+p)^{1/2} \sin \Omega}{(1+p \sin^2 \Omega)^{1/2}}$	$\frac{1+q}{q-p} \frac{(1+p)^{1/2} \sin \Omega_0}{(1+p \sin^2 \Omega_0)^{1/2}}$	$\frac{1+q}{q-p}$

Келтірілген кестедегі түрлендірулердің әр жағдайын қарастырайық.

1. $k^2 < 1$. Бұл жағдайда (10)-ші теңсіздік орындалады және қозғалыс ψ - шамасы бойынша периодты болады. Сонымен қатар $\Omega(\psi)$ шектеусіз өсе береді. Кез келген уақыт мезетіндегі $\Omega = \Omega(\psi)$ келесі теңдеумен анықталады

$$\Omega = \arcsin \left(\frac{\operatorname{sn}(\psi, k)}{\sqrt{1+p-p \cdot \operatorname{sn}^2(\psi, k)}} \right), \quad (15)$$

$$\psi = H(\tau - \tau_0) + F(\varphi_0, k), \quad \tau = \tau(t).$$

2. $k^2 > 1$ немесе $k_1 = \frac{1}{k} < 1$. Бұл жағдайда

(12)-ші теңсіздік орындалады және қозғалыс ψ - шамасы бойынша ротациялы, сондықтан да қозғалыс шектеулі болады. Кез келген уақыт мезетіндегі $\Omega = \Omega(\psi)$ келесі теңдеумен анықталады

$$\Omega = \arcsin \times \quad (16)$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{q-p} \operatorname{sn}(\psi, k_1)}{\sqrt{(1+q) \left(1+p-p \left(\frac{q-p}{1+q} \right) \operatorname{sn}^2(\psi, k_1) \right)}} \right),$$

$$\psi = H(\tau - \tau_0) + F(\arcsin(k_1 \sin \varphi_0), k_1), \quad \tau = \tau(t).$$

$\Omega = \Omega(\tau(t))$ табылғаннан соң, $i = i(t)$ – (7)-ші интегралдан келесі түрде табамыз

$$i = \arcsin \sqrt{\frac{h}{1-2\chi \cos 2\Omega(\tau(t))}}. \quad (17)$$

Сонымен қатар $\omega = \omega(t)$ және $M = M(t)$ өрнектерін (1)-ші теңдеулер жүйесінен төмендегіше анықтаймыз

$$\omega - \omega_0 = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{n_0}$$

$$\int_0^t \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \left(\varepsilon \int_0^t \alpha(t) dt \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{4}{3} \pi \alpha(t) \right] \gamma^2 dt +$$

$$+ \frac{3f(8-5h-4\chi)}{2n_0 a^5 (1-e^2)^2} \int_0^t \frac{R(t)m(t)J_2(t)}{\gamma^3(t)} dt - \frac{\chi \left(\frac{\psi - \Pi(\varphi, n, k)}{p} \right)}{H}, \quad (18)$$

мұндағы $\Pi(\varphi, n, k)$ – үшінші текті эллиптикалық интеграл, $n = \frac{p}{1+p}$ – үшінші текті эллиптикалық интегралдың параметрі, $\varphi = am(\psi, k)$.

$$M - M_0 = n_0 \int_0^t \gamma^2(t) dt + \frac{7+3e^2}{2n_0} \times \int_0^t \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \left(\varepsilon \int_0^t \alpha(t) dt \right) \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{4}{3} \pi \alpha(t) \right] \gamma^2 dt + \frac{3f \left(1 - \frac{3}{2} h \right)}{2n_0 a^5 (1-e^2)^{3/2}} \int_0^t \frac{m(t)R(t)J_2(t)}{\gamma^3(t)} dt. \quad (19)$$

Табылған (18)–(19)-ші шешімдерде χ, h мән-дері (5), (7)-ші өрнектерге сәйкес анықталады.

Сонымен қарастырылған (4)-ші және (6)-ші дербес жағдайларда, қойылған мәселенің толық гасырлық шешімі (15)–(19)-ші теңдеулермен анықталады. Әрі қарай осы шешімдерді талдау көзделуде.

ӘДЕБИЕТ

1. *Омаров Т.Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики. Алма-Ата: Наука, 1975. С. 144.
2. *Омаров Т.В.* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002. 260 p.
3. *Мингибаев М.Дж.* Динамика нестационарных гравитирующих систем. Алматы: Казак университеті, 2009. С. 209.
4. *Мингибаев М.Дж., Байдалда Ф.Д.* Бейстационар эллипсоид өрісіндегі нүкте орбитасы жазықтығының орнықтылығы жөнінде // Тр. Междун. Научно-практ. конф. «Механика и строительство транспортных сооружений». КазГАСА. Алматы, 28–29 январь 2010 г. С. 19–22.
5. *Мингибаев М.Ж., Байдалда Ф.Д.* Гравитациялаушы және кедергілі ортадағы нүктенің үш өсті бейстационар эллипсоид өрісіндегі қозғалысы // Докл. НАН РК. Алматы, 2010 (в печати).
6. *Прудников А.Л., Брычков Ю.А.* и др. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. С. 800.

7. Градштейн И.С. и др. Таблицы интегралов, суммы, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971. С. 1108.

Резюме

Рассмотрены движение материальной точки в гравитационном поле трехосного нестационарного эллипсоида переменной массы, формы и размеров внутри гравитирующей и сопротивляющейся среды. Получено полное решение дифференциальных уравнений вековых возмущений.

Summary

The movement of point mass in the gravitational field of three – axis's non-stationary ellipsoid with variable mass, shape and sizes inside of gravitating and damping medium searched. The general solution of differential equations for secular perturbations is derived.

«В. Г. Фесенков ат. Астрофизика институт» ЕЖШС, Алматы қ.;
аль-Фараби ат. Қазақ ұлттық университеті

20.04.2010ж. түскен күні