УДК 524.8

Ш.Р. МЫРЗАКУЛ

РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ВО ВСЕЛЕННОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ НЕСТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Исследован рост плотности возмущений в барионном субстрате, обусловленный нестационарным характером уравнения состояния небарионной материи во Вселенной для релятивистского случая. Показано, что существенные возмущения плотности барионной материи происходят уже в эпоху первичного нуклеосинтеза.

Поиск зависимости темной энергии от времени, а в перспективе детальное исследование этой зависимости – важнейшая задача наблюдательной космологии, которая должна в конечном итоге позволить выяснить природу темной энергии. Нашей же целью является исследования эволюции возмущений плотности вещества, а именно барионной материи, зависящей от плотности темной энергии, описываемой нестационарным уравнением состояния в ранней Вселенной. В этой работе мы рассматриваем релятивистский случай.

В работе [1] было выведено наиболее общее релятивистское уравнение, описывающее рост возмущении барионной материи

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}+\left[n(2\omega-c_s^2)-1\right]H\frac{d\delta}{dt}+n[(\frac{n}{2}\omega^2-$$

$$-(n+1)\omega-\frac{n-2}{2}+n\,c_s^{\,2})\,H^2+$$

$$+\frac{1}{2}(n\omega^2+2-n)\,K+\frac{k^2-n\,K}{n}c_s^{\,2}]\delta=L\,. \quad (1)$$

Здесь

$$L=-(k^2-nK)\,\omega\,\Gamma-(n-1)(1-\frac{nK}{k^2})\,H\,\omega\,\Pi'+$$

$$+[\{n(\omega^2+c_s^{\,2})-2\omega\}H^2+(\omega n+n-1)\omega K+,$$

$$+\frac{k^2-nK}{n}c_s^{\,2}](1-\frac{n\,K}{k^2})(n-1)\,\Pi\,,$$

где δ – возмущение плотности барионной материи, c_s^2 - скорость звука в барионной материи, $\vec{k}$ – волновой вектор, G – гравитационная постоянная, а ρ_b – плотность барионной материи, Г – энтропийное возмущение, П – возмущение анизотропного напряжения, n – размерность пространства.

Характерными особенностями этого уравнения является учет энтропийных возмущений, многокомпонентность, анизотропия среды и т.д. Но главной особенностью его является релятивистский характер. Поэтому в дальнейшем мы будем опираться на это уравнение, но пренебрегать правой частью, т.к. для простоты будем рассматривать однокомпонентную, однородную жидкость. С учетом этих замечании релятивистское уравнение (1), описывающее рост возмущений плотности барионной материи, имеет вид

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}+\left[n(2\omega-c_s^2)-1\right]H\frac{d\delta}{dt}+n[(\frac{n}{2}\omega^2-$$

$$-(n+1)\omega-\frac{n-2}{2}+n\,c_s^{\,2})\,H^2+$$

$$+\frac{1}{2}(n\omega^2+2-n)\,K+\frac{k^2-n\,K}{n}c_s^{\,2}]\delta=0. \quad (2)$$

В этом уравнении $n=3$, $K=0$ для трехмерного, плоского пространства.

Заметим, что в статье [2] также использовались результаты работы [1]. При этом релятивистское уравнение роста возмущений плотности барионной материи было записано в виде

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}+2H\left[1-3(\omega-\frac{c_s^2}{2})\right]\frac{d\delta}{dt}+,$$

$$+\frac{3H^2}{2}(3\omega^2-8\omega-1+6\,c_s^{\,2})\,\delta=\frac{k^2}{a^2}c_{eff}^2\delta\,, \quad (3)$$

где c_{eff} – эффективная скорость звука.

Сравним уравнения (2) с (3), подставив сюда $\omega=\text{const}=c_s^2$. В результате получаем два уравнения

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} - 2H\frac{d\delta}{dt} + 3[(\frac{3}{2}\omega^2 -$$

$$-\omega - \frac{1}{2})H^2 + \frac{1}{3}k^2 c_{eff}^2]\delta = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H[1 - \frac{3\omega}{2}]\frac{d\delta}{dt} +$$

$$+\frac{3}{2}[(3\omega^2 - 2\omega - 1)H^2]\delta = \frac{k^2}{a^2}c_{eff}^2\delta. \qquad (5)$$

Анализ этих уравнений показывает, что они отличаются друг от друга коэффициентом во втором слагаемом и только (5) переходит в известное нерелятивистское уравнение [3]. Поэтому, в дальнейшем мы будем рассматривать уравнение (5), как корректное релятивистское уравнение, описывающее рост возмущений плотности барионной материи в ранней Вселенной.

Чтобы решить уравнение (5), нам необходимо определить постоянную Хаббла, которая зависит, как известно, от эволюции масштабного фактора как $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

Эволюция масштабного фактора. Уравнения Эйнштейна, описывающие эволюцию масштабного фактора, имеют вид [3]

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho_{nb} + 3p_{nb})a, \qquad (6)$$

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho_{nb}. \qquad (7)$$

Из уравнений (6) - (7) следует закон сохранения энергии

$$\dot{\rho}_{nb}a^3 + 3(\rho_{nb} + p_{nb})a^2\dot{a} = 0. \qquad (8)$$

В этой системе ρ_{nb} – плотность небарионной материи, p_{nb} – ее давление.

Для определения того, как Вселенная эволюционирует во времени, необходимо задать уравнение состояния небарионного вещества, которое связывает между собой его плотность энергии и давление. Для адиабатических процессов оно задается в виде $p_{nb} = \omega_{nb} \cdot \rho_{nb}$, где ω_{nb} – параметр состояния (постоянный в модели Фридмана). Для известных видов небарионной материи, например квинтэссенции, вакуума, фантомной энергии, он принимает значения $-1\langle\omega_{nb}\langle 1/3$, -1, $\omega_{nb}\langle -1$, соответственно [4].

Согласно постановке задачи мы используем параметризацию Шевалье – Поларски -Линдера [5]

$$\omega_{nb}(a) = \omega_0 + \omega_1(1 - \frac{a}{a_0})\frac{a}{a_0}, \qquad (9)$$

которая описывает широкий класс нестационарных уравнений состояния. Здесь $\omega_0 = -1.3$, а ω_1=2; a_0 – фиксированный масштабный фактор, a – его текущее значение.

Решая уравнение (8) с (9) и сделав замену в виде $x = \frac{a}{a_0}$, получаем

$$\rho_{nb} = \rho_0 x \exp[3(x^2 - 2x)]\exp[3]. \qquad (10)$$

Подставляя это решение в уравнение (7), получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = \frac{8\pi}{3}G\,\rho_0 x \exp[3(x^2 - 2x)]\exp[3]$$

Для решения приведенного уравнения будем исследовать случай, когда $\frac{a}{a_0}\langle\langle 1$, т.к. рассматриваем раннюю Вселенную. Тогда, упрощая, мы получим приближенное нелинейное решение этого уравнения

$$t = \frac{2(3x-1)}{\sqrt{x}}. \qquad (11)$$

Обратив (11), имеем

$$x = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}t(\frac{1}{24}t + \frac{1}{24}\sqrt{t^2 + 48}). \qquad (12)$$

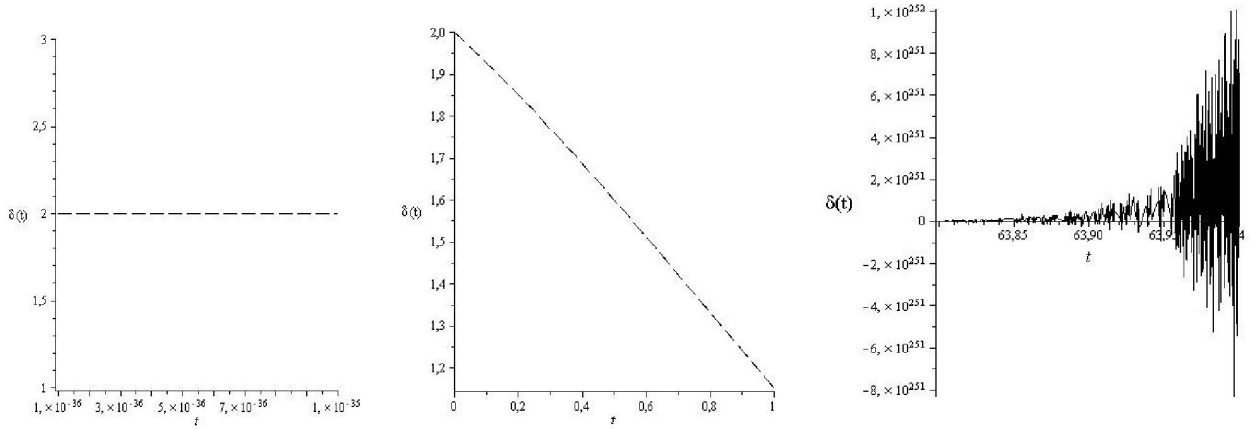
Дифференцируя (12) и пользуясь определением постоянной Хаббла, легко находим ее выражение

$$H = \frac{\dot{x}}{x} = 0.3 - 0.003t^2, \qquad (13)$$

Используя явный вид переменной x, получим эволюцию масштабного фактора

$$a = a_0\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{12}t(\frac{1}{24}t + \frac{1}{24}\sqrt{t^2 + 48})\right]. \qquad (14)$$

Подставляя эти величины в (5), получаем дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами



а б в

Рис. 1. Зависимость возмущения плотности от времени.

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2(0.3 - 0.003t^2)[1 - \frac{3\omega}{2}]\frac{d\delta}{dt} + .$$

$$+\frac{3}{2}[(3\omega^2 - 2\omega - 1)(0.3 - 0.003t^2)^2]\delta = 0 . \quad (15)$$

Мы здесь учли, что во все эпохи эволюции Вселенной $k^2 \propto a^{-2}$, а $\omega \sim \frac{1}{3}$, т.к. рассматриваем раннюю Вселенную, и вещество имеет релятивистский характер.

Решая это уравнение программой Maple 12, находим точное выражение для эволюции возмущений плотности барионной материи в виде:

$$\delta(t) = C_1 HeunT\left[3, 3, 10, \frac{1}{10}t\right] e^{-\frac{2}{3}t} +$$

$$+ C_2 HeunT\left[3, -3, 3, -\frac{1}{10}t\right] e^{\frac{1}{3}+10^{-3}t^3} . \quad (16)$$

В этом выражении функция $HeunT[\alpha, \beta, \gamma, z]$ является решением уравнения Хейна *«Heun Triconfluen»* (см. [6]).

Заключение. Рассмотрим стадию эволюции Вселенной, в которой рождается вещество и которая существовала на интервале времени от $10^{-36}c$ до $10^{-35}c$.

В эту эпоху, как отмечалось, происходит рождение барионной материи. Что касается возмущений плотности вещества, которые показаны на рисунке 1 (а), то видно, что они практически не изменяются, хотя имеют ненулевые начальные значения. Это означает, что возмущения плотности барионной материи возникли вместе с её рождением. Однако эти возмущения в последующий период в плоть до 1 *с*, как видно из рисунка 1 (б), монотонно затухают. Такие флуктуации возмущений плотности в последующем могут привести к рождению объектов галактического типа. Таким образом, наш анализ показал, что существенные возмущения плотности барионной материи происходят уже в эпоху первичного нуклеосинтеза.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kodama H., Sasaki M.* // Prog. Theor. Phys. Suppl. 78 1. – 1984.

2. *Abramo L.R., Batista R.C., Liberato L., Rosenfeld R.* // JCAP, 11 012, – 2007. [astro-ph/0604071]

3. *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., Наука, 1990. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. М. Наука, 1975; Weinberg S. Gravitation and Cosmology: Principles of the General Relativity. - J.Wiley and Sons, - New York, - 1972.

4. *Liberato L., Rosenfeld R.* // J. Cosmol. Astropart. Phys.- 07, - 009,- 2006, [astro-ph/0604071]; Lazkoz R, Nesseris S., Perivolaropoulos L. // J. Cosmol. Astropart. Phys. - 11, - 010, - 2005, - [astro-ph/0503230]. 6 Primak J.R. // xxx.lanl.gov./abc/ astro-ph/9707285; Viana P.T.P., Liddle A.R. // MNRAS, - V. 281, - P.323. - 1996; Wang L., Steinhardt P. // Astrophys. J. – V. 508, - P. 483, -1998; Munshi D., Porciani C., Wang Yun. // MNRAS, - V. 349, - P. 281. - 2004; Percival W. J. // A&A, - V. 443, - P. 819. - 2005; Nunes N.J., da Silva A.S., Aghanim N. // A&A, - V. 450, - P. 899. - 2006; Casimo Bambi. // Phys. Rev. D., - V. 75, - No. 8. - 2007.

5. *Chevallier M., Polarski D.* // Int. J. Mod. Phys. D, - V.10, - P. 213, - 2001; Linder E.V. // Phys. Rev. Lett. – V. 90, - 091301,- 2003.

6. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М., ГИФМЛ, 1958; Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1965.

Резюме

Релятивистстік жағдайдағы стационарлы емес күй теңдеуімен сипатталатын, барионды емес материяның ерте ғаламдағы барионды материяның ауытқуларының дамуына әсерін зерттедік. Барионды заттың тығыздығының ауытқулары нуклеосинтез кезеңінде пайда болғанын көрсеттік.

Summary

The growth of a baryonic matter's perturbations that caused by the nonstationary equation of state of a nonbaryonic substance in the very early Universe for relativistic case, was searched. It was shown that in the nucleus-synthesis epoch perturbation of the baryonic matter already exist.