УДК 517.977.55

З.Н. МУРЗАБЕКОВ

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком НАН РК Н.К. Блиевым)

Рассматривается задача оптимального управления для нестационарных систем с закрепленными концами траекторий. Разработан новый метод построения синтезирующего управления с учетом ограничений на управления.

Введение. В настоящее время широкий размах приобрело применение математических методов в оперативной деятельности, в планировании народного хозяйства и управлении технологическими процессами.

Для многих задач оптимального управления используются две различные постановки. Согласно одной из них оптимальное управление ищется как функция времени и начального состояния системы. Другая постановка задачи синтеза предполагает поиск оптимального управления в виде некоторой функции от текущего состояния управляемой системы и времени.

Основные идеи решения задач оптимального управления в первой постановке связаны с принципом максимума [1] (решение сводится к соответствующей краевой задаче), а решение этой же задачи при использовании второй постановки связано с динамическим программированием (задача сводится к решению уравнения Беллмана [2]). В обзорной статье [3] рассматриваются задачи достижимости и целевого управления для систем, описываемых в основном обыкновенными дифференциальными уравнениями, с ограничениями на управления и координаты, в условиях полной информации и отсутствия возмущений.

В данной работе рассматривается постановка задачи оптимального управления, когда задаются оба граничных условия для управляемой системы. Предлагается новый подход построения синтезирующего управления, основанного на принципе обратной связи с учетом ограничений на управления. Задача оптимального управления системами с закрепленными концами траекторий возникает, например, при исследовании динамики робототехнических и электроэнергетических систем, химических и ядерных реакторов. При этом требуется оптимальным образом перевести систему из некоторого начального состояния в желаемое конечное состояние за заданный интервал времени. В простейшем случае динамика исследуемых систем может быть описана линейными дифференциальными уравнениями, а критерием качества управления может служить квадратичный функционал.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемую линейную нестационарную систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t),\ t \in (t_0, T), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0,\ \ x(T) = x_1, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &u(t) \in U(t) = \{u \mid \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t), t \in (t_0, T); \\ &\alpha, \beta \in C[t_0, T]\} \subset L_2((t_0, T), R_m), \end{aligned} \tag{3}$$

где $x(t)$ – вектор состояния объекта управления размерности $n \times 1$; $u = u(t)$ – вектор управляющих воздействий размерности $m \times 1$; $f(t)$ – векторная функция размерности $n \times 1$, задана, вещественна, непрерывна и ограничена при $t \in [t_0, T]$; $A(t)$, $B(t)$ – матрицы размерности $n \times n$, $n \times m$ соответственно, заданы, непрерывны и ограничены; x_0, x_1 – заданные векторы.

Будем предполагать, что система (1) управляема, т.е. выполняется следующее условие

$$G(t_0, T) = \int_{t_0}^{T} \Phi(t_0, t) B(t) B^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt > 0, \tag{4}$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, а $\theta(t)$ - фундаментальная матрица решений системы, описываемой одно-

родным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = A(t)z .$$

Обозначим через $\Delta(t_0,T,x_0,x_1)$ множество всех допустимых управлений, удовлетворяющих условию $u(t) \in U(t)$, $t \in [t_0,T]$, и соответствующих траекторий $x(t,u)$ системы (1), определенных на отрезке $t_0 < t < T$, т.е. множество всех допустимых пар $\{x(t),u(t)\}$:

$$\begin{aligned} &\Delta(t_0,T,x_0,x_1) = \{(x,u) : u(t) \in U(t), \\ &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ &t_0 < t < T, \;\; x(t_0) = x_0, \;\; x(T) = x_1\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть на множестве (5) задан функционал

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[x^*Q(t)x + u^*R(t)u]dt, \tag{6}$$

где $Q(t)$ и $R(t)$ - заданные симметричные непрерывные и ограниченные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, удовлетворяющие условию: $Q(t) \geq 0$ (неотрицательно определенная), $R(t) > 0$ (равномерно положительно определенная).

Ставится задача. Найти синтезирующее управление $\tilde{u}(x,t,x_0,t_0,T)$ такое, что соответствующая ему пара $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) \in \Delta(t_0,T,x_0,x_1)$ и доставляет минимальное значение функционалу (6).

Для решения поставленной задачи образуем вспомогательный функционал с применением множителей Лагранжа специального вида. Для этого прибавим к выражению для функционала (6) систему дифференциальных уравнений (1) с множителем $\lambda = K(t)x + W^{-1}(t,T)(x - y(t))$ и дополнительно следующее выражение $\lambda_1^*(\alpha - u) + \lambda_2^*(u - \beta)$, где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

В результате получим следующий функционал:

$$\begin{aligned} L(x,u) = \int_{t_0}^{T}[&\frac{1}{2}x^*Q(t)x + \frac{1}{2}u^*R(t)u + \\ &+ (K(t)x + W^{-1}(t,T)(x - y(t)))^*(A(t)x + \\ &+ B(t)u + f(t) - \dot{x}) + \lambda_1^*(x,t)(\alpha(t) - u) + \\ &+ \lambda_2^*(x,t)(u - \beta(t))]dt, \end{aligned} \tag{7}$$

где $y(t)$ - вектор размерности $n \times 1$; $K(t), W(t,T)$ - симметричные положительно определенные матрицы размерности $n \times n$.

Множитель $\lambda = K(t)x + W^{-1}(t,T)(x - y(t))$ снимает ограничения, налагаемые на допустимые пары $\{x(t), u(t)\}$ в виде системы дифференциальных уравнений (1) и граничных условий (2), а функции $\{\lambda_1(x,t),\lambda_2(x,t)\}$ – соответствующие ограничения, налагаемые на управления (3).

Для рассматриваемой задачи метод множителей Лагранжа (принцип освобождения от связей) состоит в следующем: исходная задача оптимального управления с ограничениями сводится к другой задаче, но уже без ограничений. При этом новая задача формулируется так, чтобы ее решение являлось бы решением первоначальной задачи.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} V(x,t) = &\frac{1}{2}x^*K(t)x - \frac{1}{2}x(T)^*K(T)x(T) + \\ &+ \frac{1}{2}(x - y(t))^*W^{-1}(t,T)(x - y(t)) + \\ &+ \int_{t}^{T}[\frac{1}{2}(\lambda_1(x(\tau),\tau) - \\ &- \lambda_2(x(\tau),\tau))^*R^{-1}(\tau)(\lambda_1(x(\tau),\tau) - \lambda_2(x(\tau),\tau)) + \\ &+ \lambda_1^*(x(\tau),\tau)(u - \alpha(\tau)) + \lambda_2^*(x(\tau),\tau)(\beta(\tau) - u) + \\ &+ y^*(\tau)K(\tau)f(\tau)]d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda = K(t)x + W^{-1}(t,T)(x - y(t)),$$

$$M(x,u,t) = \frac{1}{2}x^*Q(t)x + \frac{1}{2}u^*R(t)u + \frac{dV(x,t)}{dt}. \tag{9}$$

Тогда справедливо следующее представление функционала (7)

$$L(x,u) = V(x_0,t_0) + \int_{t_0}^{T}M(x,u,t)dt . \tag{10}$$

Решение задачи. Алгоритм решения задачи реализуется способом задания матриц $K(t),W(t,T)$ и функций $\{y(t),\lambda_1(x,t),\lambda_2(x,t)\}$, которые отвечают тому, чтобы пара $\{\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\}$, была бы допустимой, т.е. $\{\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\} \in \Delta(t_0,T,x_0,x_1)$.

Производим выбор $(K,W, y, \lambda_1,\lambda_2)$ таким образом, чтобы при каждом фиксированном $t \in (t_0,T)$ функция $M(x,u,t)$ достигала наименьшего значения на паре $(\tilde{x}, \tilde{u})$. Если при этом

функция $\tilde{x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при управлении $\tilde{u} = u(x,t,x_0,t_0,T)$ с условиями (2), (3), то такая пара $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ будет искомым решением поставленной задачи.

Методами дифференциального исчисления из (10) находим управление, доставляющее минимальное значение функции $M(x,u,t)$ в следующем виде:

$$\tilde{u} = -R^{-1}(t)[B^*(t)(K(t)x + W^{-1}(t,T)(x - y(t))) - \lambda_1(x,t) + \lambda_2(x,t)].$$

Обозначим $\varphi(x,t) = -R^{-1}(t)[-\lambda_1(x,t) + \lambda_2(x,t)]$, тогда синтезирующее управление примет вид:

$$\tilde{u} = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)x + W^{-1}(x - y(t))) + \varphi(x,t). \quad (11)$$

Множители $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, заданы таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\lambda_1^*(x,t)(\alpha(t) - \tilde{u}) = 0,\ \lambda_2^*(x,t)(\tilde{u} - \beta(t)) = 0. \quad (12)$$

Для этого осуществлен выбор λ_1, λ_2, φ в следующем виде:

$$\lambda_1(x,t) = -R(t)\inf(0, w(x,t) - \alpha(t)),$$
$$\lambda_2(x,t) = -R(t)\inf(0, \beta(t) - w(x,t)), \quad (13)$$

$$\varphi(x,t) = -\inf(0, w(x,t) - \alpha(t)) + \inf(0, \beta(t) - w(x,t)), \quad (14)$$

где обозначено

$$w(x,t) = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)x + W^{-1}(x - y(t))). \quad (15)$$

Матрицы $K(t)$, $W(t,T)$, $t \in [t_0,T]$, функция $y(t)$ заданы следующим образом:

$$\dot{K} + KA(t) + A^*(t)K - KB(t)R^{-1}(t)B^*(t)K + Q(t) = 0,\ K(t_0) = K_0, \quad (16)$$

$$\dot{W} = WA_1^*(t) + A_1(t)W - B_1(t),\ W(T,T) = 0, \quad (17)$$

$$\dot{y} = A_1(t)y + (E + W(t,T)K(t))f(t),\ t \in [t_0,T],$$
$$y(T) = x_1, \quad (18)$$

где обозначено

$$A_1(t) = A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^*(t)K(t),$$
$$B_1(t) = B(t)R^{-1}(t)B^*(t). \quad (19)$$

Пусть существуют решения уравнений (16)-(18) и выполнены условия (12), тогда имеем значение функции

$$M(\tilde{x},\tilde{u},t) = 0, \quad (20)$$

а дифференциальные уравнения, определяющие закон движения системы (1) с управлением $\tilde{u}(x,t) = w(x,t) + \varphi(x,t)$, представим в следующем виде:

$$\dot{x} = A_1(t)x - B_1(t)W^{-1}(t,T)(x - y(t)) + f(t) + B(t)\varphi(x,t),$$
$$x(t_0) = x_0, \quad (21)$$

Используя, решения дифференциальных уравнений (18) и (21), аналогично работе [4] получаем, что состояние системы (21), соответствующее управлению (11), в конечный момент времени будет равно $x(T) = x_1$.

Действительно, выполнение краевых условий (2) следует из следующего соотношения

$$\tilde{x}(t) = W(t,T)q(t) + y(t),\ t \in [t_0,T], \quad (22)$$

где функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{q} = -A_1^*(t)q - K(t)f(t) + W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x,t),$$
$$q(t_0) = W^{-1}(t_0,T)[x(t_0) - y(t_0)]. \quad (23)$$

Теперь, получаем минимальное значение функционала (10) в виде:

$$L(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) = \frac{1}{2}x_0^*K(t_0)x_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)^*W^{-1}(t_0,T)(x_0 - y_0) - \frac{1}{2}x_1^*K(T)x_1 + \int_{t_0}^{T}[\frac{1}{2}\varphi^*(\tilde{x},t)R(t)\varphi(\tilde{x},t) + y^*(t)K(t)f(t)]dt. \quad (24)$$

Результаты установленные для поставленной задачи сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема. Для оптимальности пары $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) \in \Delta(t_0,T,x_0,x_1)$ в задаче (1)–(3), (6), необходимо и достаточно, чтобы:

1) $\tilde{x}(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = A_1(t)x - B_1(t)W^{-1}(t,T)(x - y(t)) + f(t) + B(t)\varphi(x,t) \quad (25)$$

с условиями $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_1$;

2) управление $\tilde{u}(t)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = u(\tilde{x}(t), t, x_0, t_0, T) = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)\tilde{x}(t) + \\ + W^{-1}(t,T)(\tilde{x}(t) - y(t))) + \varphi(\tilde{x}(t), t), \quad (26)$$

где матрицы $K(t)$, $W(t,T)$ являются решениями уравнений (16) и (17), функция $y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (18), а функция $\varphi(x,t)$ определена в виде (14).

Доказательство. Необходимость следует из выражений (11)-(18). Достаточность. Пусть для пары $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ выполнены условия теоремы. Тогда для фиксированного $t \in [t_0, T]$ функция $M(\tilde{x}, \tilde{u}, t)$ достигает значения (20).

Пусть $(x_k(t),\ u_k(t)) \in \Delta(t_0, T, x_0, x_1)$, $t \in [t_0, T]$ - произвольная допустимая пара, для которой справедлива формула

$$L(x_k, u_k) = V(x_k, t_0) + \int_{t_0}^{T} M(x_k, u_k, \tau)d\tau, \quad (27)$$

где обозначено

$$V(x_k, t) = \frac{1}{2}x_k{}^* K(t)x_k - \frac{1}{2}x_k^*(T)K(T)x_k(T) + \\ + \frac{1}{2}(x_k - y(t))^* W^{-1}(t,T)(x_k - y(t)) + \\ + \int_t^T [\frac{1}{2}(\lambda_1(x_k(\tau),\tau) - \lambda_2(x_k(\tau),\tau))^* R^{-1}(\tau)(\lambda_1(x_k(\tau),\tau) - \\ - \lambda_2(x_k(\tau),\tau)) + \lambda_1^*(x_k(\tau),\tau)(u_k - \alpha(\tau)) + \\ + \lambda_2^*(x_k(\tau),\tau)(\beta(\tau) - u_k) + y^*(\tau)K(\tau)f(\tau)]d\tau. \quad (28)$$

$$M(x_k, u_k, t) = \frac{1}{2}x_k{}^* Q(t)x_k + \\ + \frac{1}{2}u_k{}^* R(t)u_k + \frac{dV(x_k,t)}{dt}. \quad (29)$$

Тогда имеем из (24) и (27)

$$L(x_k, u_k) - L(\tilde{x}, \tilde{u}) = V(x_k, t_0) - V(\tilde{x}, t_0) + \\ + \int_{t_0}^{T} [M(x_k, u_k, \tau) - M(\tilde{x}, \tilde{u}, \tau)]d\tau. \quad (30)$$

Теперь получаем с учетом (8), (20) и (28), (29)

$$L(x_k(t), u_k(t)) - L(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \\ = \int_{t_0}^{T} \{\frac{1}{2}[u_k + R^{-1}B^*((K + W^{-1})x_k - W^{-1}y)]^* R[u_k + \\ + R^{-1}B^*((K + W^{-1})x_k - W^{-1}y)] - \\ - \frac{1}{2}\varphi^*(\tilde{x}, t)R\varphi(\tilde{x}, t)\}dt \ge 0. \quad (31)$$

Здесь учтено, что

$$\varphi(\tilde{x}, t) = -\inf(0, w(\tilde{x}, t) - \alpha(t)) + \inf(0, \beta(t) - w(\tilde{x}, t)) \\ w(\tilde{x}, t) = -R^{-1}(t)B^*(t)[(K(t) + \\ + W^{-1}(t,T))\tilde{x}(t) - W^{-1}(t,T)y(t)]. \quad (32)$$

Тогда имеем

$$J(x_k, u_k) - J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \\ = \int_{t_0}^{T} \{\frac{1}{2}[u_k + R^{-1}(t)B^*(t)((K(t) + W^{-1}(t,T))x_k - \\ - W^{-1}(t,T)y(t))]^* R(t)[u_k + \\ + R^{-1}(t)B^*(t)((K(t) + W^{-1}(t,T))x_k - \\ - W^{-1}(t,T)y(t))] - \frac{1}{2}\varphi^*(\tilde{x}, t)R(t)\varphi(\tilde{x}, t)\}dt \ge 0. \quad (33)$$

Отсюда следует, что

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf\{J(x,u),\ (x,u) \in \Delta(t_0, T, x_0, x_1)\}. \quad (34)$$

Теорема доказана.

Резюмируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. Предлагается новый подход построения управления, основанного на принципе обратной связи, приводящие управляемую систему в требуемое состояние за конечное время при наличии ограничений на управления.

2. Предлагаемый подход построения функции в виде (8), удовлетворяет условиям оптимальности Беллмана. Для поставленной задачи имеем:

$$\inf_{(x,u)\in\Delta} M(x,u,t) = 0, \quad (35)$$

$$M(x_k, u_k, t) = \frac{1}{2}x_k{}^* Q(t)x_k + \frac{1}{2}u_k{}^* R(t)u_k + \\ \frac{dV(x_k,t)}{dt} = \frac{1}{2}(u_k - u_n)^* R(t)(u_k - u_n) \ge 0, \quad (36)$$

где $(x_k, u_k) \in \Delta(t_0, T, x_0, x_1)\}$, $u_n = -R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)x_k + \\ + W^{-1}(x_k - y(t))) + \varphi(x_k, t)$.

Множители заданы таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\lambda_1^*(x_k,t)(\alpha(t)-u_n)=0,\ \lambda_2^*(x_k,t)(u_n-\beta(t))=0. \quad (37)$$

Для этого осуществлен выбор λ_1, λ_2, φ в следующем виде:

$$\lambda_1(x_k,t)=-R(t)\inf(0,w(x_k,t)-\alpha(t)),$$

$$\lambda_2(x_k,t)=-R(t)\inf(0,\beta(t)-w(x_k,t)), \quad (38)$$

$$\varphi(x_k,t)=-\inf(0,w(x_k,t)-$$

$$-\alpha(t))+\inf(0,\beta(t)-w(x_k,t)), \quad (39)$$

где обозначено

$$w(x_k,t)=-R^{-1}(t)B^*(t)(K(t)x_k+W^{-1}(x_k-y(t))). \quad (40)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1976. – 392 с.

2. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1968. – 446 с.

3. *Куржанский А.Б.* Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений // Дифференциальные уравнения. – 2005. том 41, №1. – С. 12-22.

4. *Мурзабеков З.Н.* Оптимизация управляемых линейных нестационарных систем при наличии ограничений на управления // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2008. – №4. Специальный выпуск. С. 105– 109.

Резюме

Ұштарынан бекітілген траекториялы стационарлы емес жүйе үшін тиімді басқару есебі қарастырылады. Шектеу есебімен басқаруға синтездеу басқаруының құрылуына жаңа әдіс өңделген.

Summary

The aim of optimal management for constables systems with fixed ends of trajectory is considered in the article. A new method of construction of synthesizing management taking into account limitation of management is worked out.

Алматинский технологический университет

Поступила 14.05.09 г.