УДК 517.956

Е. Х. НЕСИПБАЕВ[(1,2)], *Г. ОРАЛСЫН*[(1)]

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

([1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, г. Алматы,

[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

(*Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым*)

Аннотация

В работе [1] найдены граничные условия объемного потенциала для уравнения Пуассона в любой ограниченной области Ω многомерного евклидового пространства. Граничные условия объемного потен-циала для бигармонического уравнения были получены работе [2], а также было показано, что решение полученной граничной задачи совпадает с объемным потенциалом. В данной работе исследовано вырож-дающееся эллиптическое уравнение типа Чаплыгина и получены аналогичные результаты: граничные усло-вия объемного потенциала для этого уравнения в эллиптической области. Доказано, что полученная нело-кальная граничная задача для эллиптического уравнения типа Чаплыгина имеет единственное решение, ко-торое совпадает с объемным потенциалом в области определения оператора. Для наглядности приведенных результатов в работе рассматривается пример.

Ключевые слова: объемный потенциал, эллиптическое уравнение, фундаментальное решение, урав-нение Чаплыгина.

Кілт сөздер: көлемді әлеует, эллиптикалық теңдеу, іргелі шешім, Чаплыгин теңдеуі.

Keywords: volume potential, elliptic equation, fundamental solution, Chaplygin equation.

Рассмотрим в области $\Omega \in R^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ следующее вырождающееся эллиптическое уравнение типа Чаплыгина

$$Чu = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad y > 0,\ m > 0$$

(1)

В эллиптической области Ω рассмотрим объемный потенциал

$$u(x,y)=\iint\limits_{\Omega} q(x,y;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\tau\, d\xi\ .$$

(2)

Здесь q – фундаментальное решение уравнения (1) в эллиптической полуплоскости, задаваемое выражением [1, стр.155]

$$q(x,y;\tau,\xi)=k\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}(r_1^2)^{-\beta}(1-\sigma)^{1-2\beta}F(1-\beta,\ \ 1-\beta,\ \ 2-2\beta;\ \ 1-\sigma),$$

(3)

где F – гипергеометрическая функция, и

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\}=(x-\tau)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp\xi^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$\sigma=\frac{r^2}{r_1^2},\qquad \beta=\frac{m}{2(m+2)},\qquad k=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Т.е. q удовлетворяет следующему уравнению:

$$y^m\frac{\partial^2 q(x,y;\tau,\xi)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q(x,y;\tau,\xi)}{\partial y^2}=\delta(\varphi-\psi),$$

где $\varphi=(x,y),\quad \psi=(\tau,\xi)$, δ – дельта-функция Дирака.

Теорема 1. Для любой функции $f\in L_2(\Omega)$ объемный потенциал (2) принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет граничным условиям на $\partial\Omega$.

$$\frac{u}{2}+\int\limits_{\partial\Omega} q(\xi^m u_\tau d\xi-u_\xi d\tau)-u(\xi^m q_\tau d\xi-q_\xi d\tau)=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega,$$

(4)

где q – фундаментальное решение уравнения (1) в эллиптической плоскости. Обратно, если решение уравнения (1) удовлетворяет граничным условиям (4), то оно определяет объемный потенциал по формуле (2).

Доказательство. Применяя к функции $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\partial\Omega)$ формулу Грина при любом $(x,y)\in\Omega$, получим равенство

$$u(x,y)=\iint\limits_{\Omega} q(x,y;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\tau d\xi=\iint\limits_{\Omega} q\text{Ч}\,\mathrm{ud}\tau\mathrm{d}\xi=$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega} q(\xi^m u_\tau d\xi-u_\xi d\tau)-u(\xi^m q_\tau d\xi-q_\xi d\tau)+\iint\limits_{\Omega} u\text{Ч}\mathrm{qd}\tau\, d\xi=$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega} q(\xi^m u_\tau d\xi-u_\xi d\tau)-u(\xi^m q_\tau d\xi-q_\xi d\tau)+u(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega.$$

Отсюда вытекает тождество

$$\int_{\partial\Omega} q(\xi^m u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega..$$

(5)

Из (5), по свойству потенциалов простого и двойного слоя согласно лемме Геллерстедта [1, стр. 155], при $(x,y) \to \partial\Omega$, находим

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi^m u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega.$$

(6)

Итак, равенство (6) является граничным условием объемного потенциала (2).

Далее, предельным переходом несложно показать, что формула (6) остается справедливой и для всех $u \in W_2^2(\Omega)$.

Обратно покажем, что если решение u_1 уравнения (1) удовлетворяет граничному условию (4), то оно совпадает с объемным потенциалом (1).

Действительно, если это не так, то функция $v = u - u_1 \in W_2^2(\Omega)$, где u –объемный потенциал (2), удовлетворяет однородному уравнению

$$Чv = y^m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

и однородному условию:

$$\frac{v(x,y)}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi^m v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega.$$

(4′)

Применив формулу Грина к функции $v \in W_2^2(\Omega)$, как и выше, убеждаемся в том, что

$$0 = \iint_{\Omega} q(x,y;\tau,\xi) Ч\, v\, d\tau d\xi =$$

$$= \int_{\partial\Omega} q(\xi^m v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + \iint_{\Omega} v Ч q\, d\tau\, d\xi =$$

$$= \int_{\partial\Omega} q(\xi^m v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega.$$

Т.е.

$$\int_{\partial\Omega} q(\xi^m v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega.$$

(7)

Отсюда, при $(x,y) \to \partial\Omega$, находим

$$0 = \frac{v(x,y)}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi^m v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega.$$

(8)

Так как функция v удовлетворяет условию (4′), то мы имеем из (8)

$$v(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega.$$

Подведем итоги:

$$y^m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega.$$

(9)

$$v(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega.$$

(10)

Из единственности решения задачи Дирихле для уравнения (9) вытекает, что $v = u - u_1 \equiv 0, \ \ \forall (x,y) \in \Omega$ $v = u - u_1 \equiv 0, \ \ \forall (x,y) \in \Omega$, т.е. u_1 совпадает с объемным потенциалом (2). Теорема 1 доказана.

Пример. Требуется найти граничные условия для следующего уравнения:

$$u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

(11)

фундаментальное решение которого выражается формулой [4, стр. 198]:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}|x|.$$

(12)

Решение. Так как (12) – фундаментальное решение уравнения (11), то одномерный объемный потенциал на интервале $\Omega = (0,1)$ задается равенством

$$u(x) = \varepsilon * f = \int_0^1 \frac{1}{2}|x-y| f(y)dy.$$

(13)

Подставляя значение $f(y)$, находим

$$u(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}|x-y|u''(y)dy =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}|x-y|u''(y)dy - \int_x^1 \frac{1}{2}|x-y|u''(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-xu'(0) + u(x) - u(0) - (x-1)u'(1) - u(1) + u(x)\right] =$$

$$= u(x) - \frac{1}{2}\left[xu'(0) + u(0) + (x+1)u'(1) + u(1)\right].$$

Следовательно, граничные условия объемного потенциала имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u'(0)+u'(1)=0, \\ -u'(1)+u(0)+u(1)=0. \end{cases} \qquad (14)$$

Следовательно, уравнение (11), где $u(x)$ определено по формуле (13) однозначно определяет граничные условия (14). С другой стороны, задача (11), (14) однозначно определяет объемный потенциал (13).

Заключение. Одной из самых сложных проблем математической физики является нахождение явного решения граничной задачи для любой области Евклидового пространства. Например, в случае граничной задачи для уравнения Лапласа мы можем найти ее решение в явном виде лишь для некоторых канонических областей Евклидового пространства. Новизна данной работы состоит в том, что мы показали, что полученная граничная задача для уравнения типа Чаплыгина является разрешимой в явном виде. Из теоремы 1 сразу же следует, что если мы будем рассматривать следующую нелокальную граничную задачу для вырождающегося эллиптического уравнения типа Чаплыгина:

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad y>0,\ m>0,$$

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi^m u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi^m q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x,y)\in\partial\Omega,$$

то эта задача является разрешимой в явном виде для любой ограниченной области Евклидового пространства. Более того, фундаментальное решение данной задачи:

$$q(x,y;\tau,\xi) = k\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2} (r_1^2)^{-\beta}(1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta;\ 1-\sigma)$$

является ее функцией Грина для любой ограниченной области.

Авторы выражают благодарность своему учителю, д.ф.-м.н., профессору, академику НАН РК, уважаемому Т.Ш.Кальменову за постановку задачи и за постоянное внимание в процессе написания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады академии наук. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 16-19.

2 Сураган Д., Несипбаев Е.Х. Граничные условия объемного потенциала для бигармонического уравнения // Известия НАН РК. – 2013 (в печати).

3 Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970.

4 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

REFERENCES

1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spektral'nym voprosam ob’emnogo potenciala // Doklady akademii nauk. – 2009. – T. 428, N 1. – S. 16-19. (in Russ).

2 Suragan D., Nesipbaev E.H Granichnye uslovija ob’emnogo potenciala dlja bigarmonicheskogo uravnenija // Izvestija NAN RK (v pechati). (in Russ).

3 Smirnov M.M. Uravnenija smeshannogo tipa. – M.: Nauka, 1970 (in Russ).

4 Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoi fiziki. – M.: Nauka, 1981 (in Russ).

Резюме

Е. Х. Несіпбаев, Г. Оралсын

ЕКІНШІ РЕТТІ АЗҒЫНДАЛАТЫН ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН

БІР ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ЕСЕП ТУРАЛЫ

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы қ.,

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

[1] жұмыста кез келген Ω облыс үшін Пуассон теңдеуі үшін көлемді әлеуеттің шекаралық шарттары табылған. [2] жұмыста бигармоникалық теңдеу үшін көлемді әлеуеттің шекаралық шарттары табылған, сонымен бірге алынған шекаралық есептің шешімі көлемді әлеуетпен сәйкес келетіні көрсетілген. Чаплыгин түріндегі азғындайтын эллиптикалық теңдеу осы жұмыста зерттелген. Осы теңдеу үшін эллиптикалық облыста көлемді әлеуеттің шекаралық шарттары алынған. Чаплыгин түріндегі теңдеу үшін эллиптикалық облыста алынған локалды емес шекаралық есеп жалғыз шешімі болатындығы дәлелденген. Ол оператордың анықтау облысында көлемді әлеуетпен сәйкес келеді. Жұмыста алынған нәтижелердің көрнекілігі үшін мысал қарастырылады.

Кілт сөздер: көлемді әлеует, эллиптикалық теңдеу, іргелі шешім, Чаплыгин теңдеуі.

Summary

E. H. Hesypbayev, G. Oralsyn

ON THE ONE NON-LOCAL PROBLEM

FOR THE SECOND ORDER DEGENERATING ELLIPTIC EQUATION

(Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty,

al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

In the paper [1] the authors found boundary conditions of the volume potential for the Poisson equation in any bounded domain Ω of multidimensional Euclidean space. In work [2] it was found that boundary conditions of the volume potential for the bi-harmonic equation, also it was proved that the solution of obtained boundary-value problem coincides with the volume potential. In this paper we investigate Chaplygin type degenerated elliptic equations. Boundary conditions for this equation in elliptic domain are obtained here. Also we show that the obtained non-local problem for the Chaplygin type degenerated elliptic equation has a unique solution which coincides with the volume potential in the definition domain of the operator. For the visualization we also consider an example.

Keywords: volume potential, elliptic equation, fundamental solution, Chaplygin equation.

Поступила 5.03.2013г.