Д. Н. НУРГАБЫЛ, А. Б. УАИСОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ

Исследуется сингулярно возмущенная краевая задача при условии, что действительные части корней дополнительного характеристического уравнения имеют противоположные знаки.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную краевую задачу

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = F(t), \tag{1}$$

$$y(0,\varepsilon) = a_0, \quad y'(0,\varepsilon) = a_1, \quad y'(1,\varepsilon) = a_2, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, a_0, a_1, a_2 – константы.

В [1, 2] найдены асимптотические оценки решения уравнения (1) со следующими условиями

$$y(0,\varepsilon) = a_0, \quad y'(0,\varepsilon) = a_1, \quad y(1,\varepsilon) = a_2.$$

При этом корни дополнительного характеристического уравнения имели только отрицательные вещественные части. В данной работе исследуется краевая задача (1), (2) с более общим требованием, состоящей в том, что действительные части корней μ_2, μ_3 дополнительного характеристического уравнения удовлетворяют условиям $\mathrm{Re}\mu_2 < 0$, $\mathrm{Re}\mu_3 > 0$.

Потребуем выполнения следующих условий:

I. Пусть $A(t), B(t), C(t) \in C^3([0,1])$, $F(t) \in C^1([0,1])$.

II. Пусть $B(t) \neq 0$ *при* $t \in [0,1]$.

III. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^3 + A(t)\mu^2 + B(t)\mu = 0 \tag{3}$$

имеет различные корни $\mu_1 = 0$, μ_2, μ_3, *причем* $Re\mu_2 < 0$, $Re\mu_3 > 0$.

IV. Пусть:

$$a_0 C(0) + a_1 B(0) \neq F(0),$$

$$\left[a_0 \exp\left(-\int_0^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx \right) + \int_0^1 \frac{F(s)}{B(s)} \exp\left(-\int_s^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx \right) ds \right] \cdot C(1) + a_2 B(1) \neq F(1).$$

Изучения решения сингулярно возмущенных краевых задач оказываются полезными при рассмотрении различных прикладных задач. Вместе с тем, исследование сингулярно возмущенных краевых задач, обладающих в нескольких точках явлением начального скачка, оказывается весьма затруднительным.

Поэтому данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных краевых задач, имеющие начальные скачки в точках $t = 0$ и $t = 1$, что является одним из особенностей изучаемой задачи.

Фундаментальная система решений. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующую задачу

$$L_0 u_1 \equiv B(t)u_1' + C(t)u_1 = 0, \; u_1(0) = 1. \tag{4}$$

В силу условий I, II задача (3) имеет решение

$$u_1(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{C(x)}{B(x)} dx \right). \tag{5}$$

Теперь рассмотрим однородное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = 0, \tag{6}$$

соответствующее уравнению (1).

Известно [3], что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (6) имеет фундаментальную систему решений $\tilde{y}_1(t,\varepsilon)$, $\tilde{y}_2(t,\varepsilon)$, $\tilde{y}_3(t,\varepsilon)$ достаточно гладких и удовлетворяющих на $[0,1]$ соотношениям

$$\tilde{y}_1^{(q)}(t,\varepsilon) = u_1^{(q)}(t) + O(\varepsilon),$$

$$\tilde{y}_2^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_2(x)dx} [u_2(t)\mu_2^q(t) + O(\varepsilon)], \tag{7}$$

$$\tilde{y}_3^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_3(x)dx} [u_3(t)\mu_3^q(t) + O(\varepsilon)],$$

Здесь $u_1(t)$ определяется формулой (5), а $u_2(t)$ и $u_3(t)$ однозначно определяются из задачи

$$p_k u_k'(t) + q_k u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = 1,$$

где

$$p_k(t) = \mu_k(t)(A(t) + 2\mu_k(t)) \neq 0, \; t \in [0,1], \; k = 2, 3,$$

$$q_k(t) = C(t) + A(t)\mu_k'(t) + 3\mu_k(t)\mu_k'(t), \; t \in [0,1], \; k = 2, 3.$$

В качестве фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения (6) возьмем

$$y_1(t,\varepsilon)=\tilde{y}_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon)=\tilde{y}_2(t,\varepsilon),\ y_3(t,\varepsilon)=\tilde{y}_3(t,\varepsilon)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\mu_3(x)dx}.$$

Тогда в силу оценок (7) имеем

$$y_1^{(q)}(t,\varepsilon)=u_1^{(q)}(t)+O(\varepsilon),$$

$$y_2^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}[u_2(t)\mu_2^q(t)+O(\varepsilon)], \tag{8}$$

$$y_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}[u_3(t)\mu_3^q(t)+O(\varepsilon)],\quad q=0,1,2.$$

Составим определитель Вронского $W(t,\varepsilon)$ для фундаментальной системы решений (6) уравнения (5). Тогда, раскладывая $W(t,\varepsilon)$ по элементам первого столбца, получим

$$W(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^3}u_1(t)u_2(t)u_3(t)\mu_3(t)\mu_2(t)(\mu_3(t)-\mu_2(t))e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t\mu_3(x)dx}(1+O(\varepsilon))\neq 0. \tag{9}$$

Здесь согласно процедуре определения $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ отличны от нуля на отрезке $0\le t\le 1$, корни $\mu_3(t)$ и $\mu_2(t)$ различны и также отличны от нуля.

Построение начальной функции. По аналогии [2], введем начальную функцию

$$K(t,s,\varepsilon)=\frac{W(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{10}$$

где $W(s,\varepsilon)$ – вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (6), $W(t,s,\varepsilon)$ – определитель третьего порядка, который получается из $W(s,\varepsilon)$ заменой третьей строки соответственно строкой

$$y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ y_3(t,\varepsilon),$$

где $y_i(t,\varepsilon),\ i=1,2,3$ – фундаментальная система решений уравнения (6).

Из явного выражения функции $K(t,s,\varepsilon)$ следует, что она обладает следующими свойствами:

1. По переменной t удовлетворяет уравнению (6):

$$L_\varepsilon K=0,\ t\in[0,1],\ t\neq s.$$

2. При $t=s$ удовлетворяет условиям:

$$K(s,s,\varepsilon)=0,\ K'(s,s,\varepsilon)=0,\ K''(s,s,\varepsilon)=1.$$

3. Не зависит от выбора фундаментальной системы решений уравнения (6).

Итак, начальная функция $K(t,s,\varepsilon)$ для уравнения (6) построена. Теперь, введем в рассмотрение следующие функции [3]:

$$K_0(t,s,\varepsilon)=\frac{P_0(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)};\quad K_1(t,s,\varepsilon)=\frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{11}$$

где $W(s,\varepsilon)$ – вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (6); $P_0(t,s,\varepsilon)$, $P_1(t,s,\varepsilon)$ – определители 3-го порядка, которые получаются из $W(s,\varepsilon)$ заменой 3-ой строки соответственно строками

$$y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ 0;\ 0,0,\ y_3(t,\varepsilon),$$

где $y_i(t,\varepsilon), i=1,2,3$ фундаментальная система решений уравнения (6). Заметим, что $K_0(t,s,\varepsilon)$, $K_1(t,s,\varepsilon)$ являются непрерывными функциями t и s вместе с производными до 3-го порядка включительно, и как функция переменной t удовлетворяют однородному уравнению (6):

$$L_\varepsilon K_0 = 0, \quad L_\varepsilon K_1 = 0$$

при $0 < t, s < 1$, а при $t = s$ удовлетворяет условиям

$$K_0(s,s,\varepsilon) + K_1(s,s,\varepsilon) = 0,\ K'_{0t}(s,s,\varepsilon) + K'_{1t}(s,s,\varepsilon) = 0,\ K''_{0t}(s,s,\varepsilon) + K''_{1t}(s,s,\varepsilon) = 1.$$

Из (11) с учетом (8) и (9) получим для $K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ и $K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon)$ следующие асимптотические формулы при $\varepsilon \to 0$:

$$K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^2\left(\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(s)B(s)} - \frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_2(x)dx\right)}{u_2(s)\mu_2(s)(\mu_3(s)-\mu_2(s))} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_2(x)dx}\right)\right),$$

$$K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^2\left(\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(s)\mu_3(s)(\mu_3(s)-\mu_2(s))}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s \mu_3(x)dx} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s \mu_3(x)dx}\right)\right), \quad (12)$$

Построение граничных функций. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_i(t,\varepsilon) = \frac{J_i(t,\varepsilon)}{J(\varepsilon)},\ i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где $J(\varepsilon)$ представляет собой определитель третьего порядка, элементы которого составлены на основе фундаментальной системы решений (8) и имеет вид

$$J(\varepsilon) = \begin{vmatrix} y_1(0,\varepsilon) & y_2(0,\varepsilon) & y_3(0,\varepsilon) \\ y'_1(0,\varepsilon) & y'_2(0,\varepsilon) & y'_3(0,\varepsilon) \\ y'_1(1,\varepsilon) & y'_2(1,\varepsilon) & y'_3(1,\varepsilon) \end{vmatrix};$$

$J_i(t,\varepsilon)$ – определитель, полученный из $J(\varepsilon)$ заменой i-ой строки на строку

$$y_1(t,\varepsilon),\ y_2(t,\varepsilon),\ y_3(t,\varepsilon),$$

которая состоит из фундаментальной системы решений (8) уравнения (6).

Непосредственно из самого способа построения функций $\Phi_i(t,\varepsilon)$ можно установить, что функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, определяемые формулой (13), удовлетворяют уравнению (5) и следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} &\Phi_1(0,\varepsilon) = 1, \quad \Phi'_1(0,\varepsilon) = 0, \quad \Phi'_1(1,\varepsilon) = 0, \\ &\Phi_2(0,\varepsilon) = 0, \quad \Phi'_2(0,\varepsilon) = 1, \quad \Phi'_2(1,\varepsilon) = 0, \\ &\Phi_3(0,\varepsilon) = 0, \quad \Phi'_3(0,\varepsilon) = 0, \quad \Phi'_3(1,\varepsilon) = 1, \end{aligned} \quad (14)$$

и не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (6).

Функцию $\Phi_i(t,\varepsilon)$, удовлетворяющую граничным условиям (14) и однородному уравнению (6), назовем граничными функциями задачи (1), (2).

Теперь исследуем асимптотическое поведение определителя $J(\varepsilon)$. Пусть выполнены условия I–III. Тогда, раскладывая $J(\varepsilon)$ по элементам последней строки и учитывая (7), находим

$$J(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}u_1(0)u_2(0)u_3(1)\mu_2(0)\mu_3(1)(1+O(\varepsilon))\neq 0. \tag{15}$$

Принимая во внимание (15) и раскладывая определители $J_i(t,\varepsilon)$ по элементам i-ой строки, из (13) получаем следующие асимптотические формулы при $\varepsilon\to 0$:

$$\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(0)}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(0)u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_1(0)u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(0)u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_1(0)u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right),$$

$$\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\left[-\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(0)\mu_2(0)}-\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx\right)+\right. \tag{16}$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(1)u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_1(0)u_3(1)\mu_3(1)\mu_2(0)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right)\right],$$

$$\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)-\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_1'(0)u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_1(0)u_3(1)\mu_3(1)\mu_2(0)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right)\right].$$

Теорема. *Пусть выполнены условия I–III. Тогда неоднородная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение и выражается формулой*

$$y(t,\varepsilon)=a_0\Phi_1(t,\varepsilon)+a_1\Phi_2(t,\varepsilon)+a_2\Phi_3(t,\varepsilon)+\Phi_1(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1K_1(0,s,\varepsilon)F(s)ds+\Phi_2(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^2}\times \tag{17}$$

$$\times\int_0^1K_1'(0,s,\varepsilon)F(s)ds-\Phi_3(t,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1K_0'(1,s,\varepsilon)F(s)ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^tK_0(t,s,\varepsilon)F(s)ds+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_1^tK_1(t,s,\varepsilon)F(s)ds.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы непосредственной проверкой достаточно убедиться, что функция, заданная по формуле (17), удовлетворяет всем условиям определения решения краевой задачи (1), (2). Ее единственность следует из (15). Теорема доказана.

Рассмотрим формулу (17). Учитывая (12), (16), получим для (17) на отрезке $0\le t\le 1$ следующее асимптотическое представление:

$$y^{(q)}(t,\varepsilon)=a_0\frac{u_1^{(q)}(t)}{u_1(0)}-\int_0^t\frac{u_1^{(q)}(t)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{F(t)}{\mu_3(t)-\mu_2(t)}\left(\frac{\mu_3^q(t)}{\mu_3^2(t)}-\frac{\mu_2^q(t)}{\mu_2^2(t)}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_2(t)\mu_2^q(t)}{u_2(0)\mu_2(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx\right)\left[a_1-a_0\frac{u_1'(0)}{u_1(0)}-\frac{F(0)}{B(0)}\right]+\frac{\varepsilon}{\varepsilon^q}\frac{u_3(t)\mu_3^q(t)}{u_3(1)\mu_3(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx\right)\times$$

$$\times\left[a_2+a_0\frac{u_1'(0)}{u_1(0)}-\frac{F(1)}{B(1)}+\int_0^1\frac{u_1'(1)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds\right]+O\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}+\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^q}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_3(x)dx}\right), \tag{18}$$

где $u_1'(0) = -\dfrac{C(0)}{B(0)}$, $u_1(0) = 1$.

Теперь определим вырожденную задачу. Без каких-либо дополнительных соображений мы не можем сформулировать краевые условия для невозмущенного (вырожденного) уравнения

$$L_0 \bar{y} = B(t)\bar{y}' + C(t)\bar{y} = F(t), \tag{19}$$

получаемого из (1) при $\varepsilon = 0$. Таким дополнительным соображением мы можем получить из (18). Из (18) следует, что предельная функция для $y(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ не будет содержать a_1, a_2, так как коэффициенты при a_1, a_2 имеют порядок $O(\varepsilon)$, а при a_0 имеет порядок $O(1)$, при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, краевые условия для решения $\bar{y}(t)$ вырожденного уравнения (19) можно получить из (2) путем оставления 1-го уравнения из (2), т.е.

$$\bar{y}(1) = a_0 . \tag{20}$$

Решение задачи (19), (20) с помощью решения (4) уравнения (3), представимо в виде

$$\bar{y}(t) = a_0 \frac{u_1(t)}{u_1(0)} - \int_0^t \frac{u_1(t)F(s)}{u_1(s)B(s)} ds, \quad \bar{y}'(t) = a_0 \frac{u_1'(t)}{u_1(0)} - \int_0^t \frac{u_1'(t)F(s)}{u_1(s)B(s)} ds + \frac{F(t)}{B(t)}. \tag{21}$$

Тогда в силу условия IV из (18) получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le 1, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t), \quad 0 < t < 1, \qquad y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Отсюда и из (18) следует, что в точках $t = 0$, $t = 1$ решение задачи (1), (2) обладает явлением начальных скачков, причем величины начальных скачков определяются из следующих равенств:

$$\Delta_0 = y(0,\varepsilon) - \bar{y}(0) = a_1 - \frac{F(0)}{B(0)} + \frac{C(0)}{B(0)} a_0,$$

$$\Delta_1 = y(1,\varepsilon) - \bar{y}(1) = a_2 - \frac{F(1)}{B(1)} + \left[a_0 e^{-\int_0^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx} + \int_0^1 \frac{F(s)}{B(s)} e^{-\int_s^1 \frac{C(x)}{B(x)} dx} ds \right] \frac{C(1)}{B(1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Есимова А.Т., Касымов К.А.* Об оценках решений сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком нулевого порядка // Вестник КазГУ. Сер. матем. Алматы, 1993. № 1. С. 140-145.

2. *Касымов К.А., Нургабылов Д.Н., Пшембаев С.К.* Асимптотические оценки решений неразделенной краевой задачи для линейных сингулярно возмущенных уравнений третьего порядка // Вестник АН РК. 1999. № 1. С. 37-40.

3. *Касымов К.А., Жакипбекова Д. А., Нургабыл Д.Н.* Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. 2001. № 3. С. 73-78.

Резюме

Қосымша сипаттаушы теңдеуді түбірлерінің нақты бөліктері қарама-қарсы таңбалы болатын сингулярлы ауытқыған шеттік есеп зерттеледі.

Summary

In the given work the author researches the singularly perturbed boundary value problems under the condition that real parts of the roots of additional distinctive equation have opposite signs.

КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 26.04.2010г.