Д. Н. НУРГАБЫЛ[1], А. КАЛИБАЙ[1], А. Б. УАИСОВ[2]

([1]Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, г. Талдыкорган;

[2] Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы)

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ОБЛАДАЮЩИЕ ЯВЛЕНИЯМИ НАЧАЛЬНОГО СКАЧКА

ПО НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Аннотация

В данной работе рассмотрена двухточечная сингулярно возмущенная краевая задача для нелиней- ного дифференциального уравнения второго порядка, правая часть которого не удовлетворяет условиям С. Н. Бернштейна. Доказана теорема об асимптотических оценках решения и его производных. Определены начальные скачки по независимой переменной.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенный, начальный скачок, обыкновенное диф-ференциальное уравнение, краевая задача.

Кілт сөздер: кіші параметр, сингулярлық ауытқу, бастапқы секіріс, қарапайым дифференциальдық теңдеу, шекаралық есеп.

Keywords: small parameter, singularno the indignant, initial jump, the ordinary differential equation, a regional task.

Введение.Началом математического решения вопроса о явлении начального скачка можно считать работы М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1, 2] и К.А. Касымова [3, 4], где был разра-ботан метод позонного интегрирования для нелинейных сингулярно возмущенных начальных задач с неограниченными начальными данными при стремлении малого параметра к нулю. Иссле-дования М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, К. А. Касымова были продолжены в [5-7]. Были разра-ботаны и другие методы, каждый из которых решал определенный круг задач. Однако для широкого класса сингулярно возмущенных краевых задач выбор надлежащего метода для построения решений или их асимптотических приближений оказывается весьма затруднительным. Анализ показывает, что к таким задачам можно отнести и сингулярно возмущенные краевые задачи [8-10], для которых характерно наличие явления начального скачка. Однако в этих работах рассмотрены сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, удовлетворяющие из-вестным условиям С. Н. Бернштейна [11]. Следовательно, краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых не удовлетворяют условиям С. Н. Бернштейна, требуют дополнительного математического исследования.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon\,(d^{2}x)/(dy^{2}) = (dx/dy)^{(3-n)} f_{1}(x;y) + (dx/dy)^{(4-n)} g_{1}(x;y) = P(y,x,x') \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x(\alpha;\varepsilon) = a\,, \qquad x(\beta;\varepsilon) = b \tag{2}$$

где a и b – некоторые известные величины; $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $I < n < 2$.

Очевидно, что представление $P(y,x,z) = (z_1)^{4-n}\left(g_1(x;y) + +O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \left(\frac{dx}{dy} = z_1 \to \infty\right)$ указывает на то, что правая часть урав-нения (1) не удовлетворяет условиям С. Н. Бернштейна [11]. Следовательно, краевая задача (1), (2) неразрешима в $C^2(A,B)$ для произвольных a, b, α и β при $\varepsilon > 0$.

Наша задача – определить, при каких значениях a, b, α и β краевая задача (1), (2) будет разрешима при достаточно малых $\varepsilon > 0$, исследовать вопросы предельного перехода решения возмущенной задачи при $\varepsilon \to 0$ к решению невозмущенной задачи.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Пусть функция $P(y,x,x')$ определена и непрерывна в области

$$G = \{y,x,x':\ -\infty < x,y < +\infty, 0 < x' < +\infty\};$$

II. Пусть функции $f_1(x;y), g_1(x;y)$ достаточно гладкие функции в области

$$D = \{x,y:\ -\infty < x,y < +\infty\};$$

I. Уравнение $f_1(x;y) + \frac{dx}{dy} g_1(x;y) = 0$, получающиеся из вырожденного уравнения $\left(\frac{dx}{dy}\right)^{3-n} f_1(x;y) + \left(\frac{dx}{dy}\right)^{4-n} g_1(x;y) = 0$ такое, что задача

$$f_1(x;y) + \frac{dx}{dy} g_1(x;y) = 0\,, \quad x(\beta) = b, \tag{3}$$

на отрезке $\alpha \le y \le \beta$ имеет единственное решение $x(y)$;

II. Существуют постоянные $\gamma_i > 0, \quad i = \overline{1;4}$ такие, что

$$0 < \gamma_1 < f_1(x(y),y) < \gamma_2, \qquad 0 < \gamma_3 < -g_1(x(y),y) < \gamma_4, \qquad \alpha \le y \le \beta. \tag{4}$$

Для исследования вопросов существования, единственности и предельного перехода в (1), (2) примем x в качестве независимой переменной, а $y = y(x)$. Тогда задача (1),(2) примет вид

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n} f(x;y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} g(x;y) = F(x,y,y'), \tag{5}$$

$$y(a;\varepsilon) = \alpha\,, \qquad y(b;\varepsilon) = \beta, \tag{6}$$

где $f(x;y)=-f_1(x;y)$; $g(x;y)=-g_1(x;y)$, $1<n<2$; функция $F(x,y,y^{\prime})$ достаточно гладкая функция в области

$$\mathcal{D}=\{x,y,y^{\prime}:\ -\infty<x,y<+\infty,\qquad 0<y^{\prime}<+\infty\}.$$

В силу условия III и IV, вырожденная задача

$$\frac{dy}{dx}f(x;y)+g(x;y)=0\ ,\quad y(b)=\beta \tag{7}$$

на отрезке $a\le x\le b$ имеет единственное решение $\bar{y}(x)$.

2. Асимптотическое разложение решения вспомогательной задачи. С целью исследования асимптотического поведения и построения асимптотики решения задачи (5), (6) предварительно рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^n f(x;y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} g(x;y), \tag{8}$$

$$y(a;\varepsilon)=\alpha,\qquad y^{\prime}(a;\varepsilon)=\frac{C(\varepsilon)}{\varepsilon^{\lambda}}, \tag{9}$$

где $\lambda=\frac{1}{2-n}$; $1<n<2$; $c(\varepsilon)$ – представимо в виде асимптотического ряда $c(\varepsilon)=c_0(\varepsilon)+\varepsilon c_1(\varepsilon)+\cdots$, c_k – неизвестные параметры, которые определяется так, чтобы решение задачи (8), (9) удовлетворяло краевым условиям (6).

Для решения задачи (8), (9) произведем следующее разбиение:

$$a\le x\le a+\varepsilon\tau_0,\qquad a+\varepsilon\tau_0\le x\le b\ ,$$

где $\tau_0>0$ – достаточно малое фиксированное при $\varepsilon\to 0$ число, не зависящее от ε. Зону $a\le x\le x_0$, $x_0=a+\varepsilon\tau_0$ назовем зоной начального скачка решения $y(x,\varepsilon)$ начальной задачи (8), (9), а зону $a+\varepsilon\tau_0\le x\le b$ – зоной вырожденного решения. В каждом из этих зон асимптотику решения задачи (8), (9) строим по отдельности.

2.1. Построение асимптотики в зоне начального скачка. В зоне начального скачка $a\le x\le a+\varepsilon\tau_0$ произведем следующее замены $\frac{dy}{dx}=z$, $x=a+\varepsilon\tau$. Тогда в новых переменных уравнение (8) с начальными условиями (9) можно записать в виде

$$\frac{dz}{d\tau}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^n f(a+\varepsilon\tau;y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} g(a+\varepsilon\tau;y)=F(a+\varepsilon\tau,y,y^{\prime}),$$

$$\frac{dy}{d\tau}=\varepsilon\cdot z, \tag{10}$$

$$y(0,\varepsilon)=\alpha,\qquad z(0,\varepsilon)=\frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon^{\lambda}};\quad \lambda=\frac{1}{2-n};\quad 0<n<1. \tag{11}$$

при этом зона начального скачка $a\le x\le a+\varepsilon\tau_0$ отображается в зону $0\le\tau\le\tau_0$.

Асимптотическое разложение решения задачи (10), (11) будем искать виде ряда [4, 5]:

$$z = z_0(\tau,\varepsilon) + \varepsilon z_1(\tau,\varepsilon) + \cdots, \qquad y = y_0(\tau,\varepsilon) + \varepsilon y_1(\tau,\varepsilon) + \cdots . \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10) и разлагая правые части системы (10) в ряды по степеням ε, получим последовательность задач для определения коэффициентов разложения (1.13).

Главные члены $z_0(\tau,\varepsilon)$; $y_0(\tau,\varepsilon)$ разложения (12) определяются из следующей задачи

$$\frac{dz_0}{d\tau} = F(a, y_0, z_0), \qquad \frac{dy_0}{d\tau} = \varepsilon \cdot z_0(\tau,\varepsilon) \tag{13}$$

$$z_0(0,\varepsilon) = \frac{c_0(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{1}{2-n}}}, \qquad y_0(0,\varepsilon) = \alpha,$$

а остальные члены $z_k(\tau,\varepsilon)$; $y_k(\tau,\varepsilon)$, $k = 1,2,\ldots$ определяются из следующей линейной системы урав-нений:

$$\frac{dz_k}{d\tau} = \frac{\partial F(a, y_0, z_0)}{\partial z} z_k + \frac{\partial F(a, y_0, z_0)}{\partial y} y_k + F_k(\tau,\varepsilon), \qquad \frac{dy_k}{d\tau} = \varepsilon z_k \tag{14}$$

с начальными условиями

$$z_k(0,\varepsilon) = \frac{c_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{1}{2-n}}}; \; y_k(0,\varepsilon) = 0, \tag{15}$$

где $F_k(\tau,\varepsilon)$ выражается через z_i, $y_i (i<k)$:

Для исследования поведения решения задачи (13) зону начального скачка $0 \le \tau \le \tau_0$ разобьем на следующие два участка: $0 \le \tau \le \tau^0$, $\tau^0 \le \tau \le \tau_0$, где $\tau^0 = \xi_0 \varepsilon^{r(n-1)}$; $r = \frac{1-\sigma}{2-n}$, $\quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}$; $\xi_0 > 0$ – достаточно малое, но фиксированное при $\varepsilon \to 0$ число.

Отметим некоторые свойства решения этой задачи в виде лемм 1 и 2.

Лемма 1. Для решения $y_0(\tau,\varepsilon)$, $z_0(\tau,\varepsilon)$ *задачи* (13) *в участке* $0 \le \tau \le \tau^0$ *зоны начального скачка справедливы следующие неравенства:*

$$\frac{\varepsilon^{\sigma} \cdot \Delta\alpha}{\left(m_1 \cdot \frac{\tau}{\varepsilon^{r(n-1)}} + \varepsilon^{\beta(n-1)}\right)^{\frac{2-n}{n-1}}} \le \bar{y}(a) - y_0(\tau,\varepsilon) \le \frac{\varepsilon^{\sigma} \cdot \Delta\alpha}{\left(m_2 \cdot \frac{\tau}{\varepsilon^{r(n-1)}} + \varepsilon^{\beta(n-1)}\right)^{\frac{2-n}{n-1}}}, \tag{16}$$

где $\Delta\alpha = \bar{y}(a) - \alpha$ *при* $0 \le \tau \le \tau^0$, $r = \frac{1-\sigma}{2-n}$, $\beta = \frac{\sigma}{2-n}$, $m_k - const > 0, k = 1,2.$

Доказательство проводится методом дифференциальных неравенств.

Из неравенств (16) видно, что значения $[\![v_0|\square]\!]_{\xi=\xi_o}$ и $[\![u_0|\square]\!]_{\xi=\xi_o}$ ограничены при $\varepsilon \to 0$. Это значение обозначим через $[\![u_0|\square]\!]_{\xi=\xi_o} = z(\varepsilon)$ и $[\![v_0|\square]\!]_{\xi=\xi_o} = y(\varepsilon)$.

Обратимся теперь к неравенствам (16). Откуда следует, что функция $z_0(\tau,\varepsilon)$ на промежутке $0 \le \tau \le \tau^0$ изменяется от величины порядка O($\varepsilon^{-\frac{1}{2-n}}$) до величины O $\left(\varepsilon^{-\frac{1-\sigma}{2-n}}\right)$, а функция $y_0(\tau,\varepsilon)$ на отрезке $0 \le \tau \le \tau^0$ возрастает и изменяется скачком от величины α до величины порядка $\overline{y}(a) + O(\varepsilon^{\sigma})$. Используя эти свойства из (13), находим, что

(17)

Из (17) можно определить неизвестный параметр Пусть

Кроме того, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\gamma_1 < -f\left(a, y(\varepsilon)\right) < \gamma_2, \tag{18}$$

что очевидно (см. (4)).

Теперь систему из (13) исследуем в промежутке $\tau^0 \le \tau \le \tau_0$ при следующих условиях

$$y_0(\tau^0, \varepsilon) = y(\varepsilon), \qquad z_0(\tau^0, \varepsilon) = z(\varepsilon).\, \varepsilon^{-\alpha}. \tag{19}$$

Лемма 2. Для решения $z_0(\tau,\varepsilon)$, $y_0(\tau,\varepsilon)$ *задачи* (13) *при* $\tau^0 \le \tau \le \tau_0$ *справедливы неравенства*

$$\tilde{z}_4(\tau,\varepsilon) \le z_0(\tau,\varepsilon) \le \tilde{z}_3(\tau,\varepsilon), \qquad \tilde{y}_4(\tau,\varepsilon) \le y_0(\tau,\varepsilon) \le \tilde{y}_3(\tau,\varepsilon) \tag{20}$$

где $\tilde{z}_i = \left[\left(\frac{\varepsilon^{\alpha}}{z(\varepsilon)}\right)^{n-1} + (n-1)\gamma_i(\tau-\tau^0)\right]^{-\frac{1}{n-1}}, \qquad i = 3,4,$

$$\tilde{y}_i = y(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^{\sigma}}{(2-n)\gamma_i}\left[(z(\varepsilon))^{2-n} - \varepsilon^{1-\sigma} \cdot \bar{z}_i^{\,2-n}\right].$$

Доказательство проводится методом сравнения и дифференциальных неравенств.

Таким образом, из лемм 1 и 2 следует, что в зоне $0 \le \tau \le \tau_0$ происходит явление начального скачка, причем функция $z_0(\tau,\varepsilon)$ при $\tau = \tau_0$ принимает конечное значение, когда $\varepsilon \to 0$; а функция $y_0(\tau,\varepsilon)$ при $\tau = \tau_0$ имеет следующее представление

$$y_0(\tau_0,\varepsilon) = \overline{y(a)} + O(\varepsilon^{\sigma}). \tag{21}$$

Обратимся теперь к задаче (14), (15), определяющей следующие члены $y_k(\tau,\varepsilon)$, $z_k(\tau,\varepsilon)$, $k \geq 1$ разложения (1.13).

Лемма 3. В зоне начального скачка $0 \leq \tau \leq \tau_0$ *для решения* $y_k(\tau,\varepsilon)$, $z_k(\tau,\varepsilon)$ *задачи (14), (15), справедливы оценки*

$$|z_k(\tau,\varepsilon)| \leq K \cdot z_0(\tau,\varepsilon), \qquad |y_k(\tau,\varepsilon)| \leq K, \tag{22}$$

где K – const> 0, k=1,2,3,....

Доказательство проводится методом интегральных уравнений.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I -IV. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ *в зоне скачка* $0 \leq \tau \leq \tau_0$ *существует единственное решение* $y(\tau,\varepsilon)$, $z(\tau,\varepsilon)$ *задачи* (13) *и это решение допускает асимптотическое представление*

$$z(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k z_k(\tau,\varepsilon) + R_1(\tau,\varepsilon), \qquad y(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k(\tau,\varepsilon) + R_2(\tau,\varepsilon), \tag{23}$$

где R_1 *и* R_2 *удовлетворяют неравенствам*

$$|R_1(\tau,\varepsilon)| \leq K \cdot \varepsilon^{N+1} \cdot z_0(\tau,\varepsilon), \qquad |R_2(\tau,\varepsilon)| \leq K \cdot \varepsilon^{N+1}. \tag{24}$$

Доказательство проводится методом интегральных уравнений.

Далее введем обозначения

$$[\![y|\square]\!]_{x=a} = \alpha^+(\varepsilon), \qquad [\![z|\square]\!]_{x=a} = \beta(\varepsilon),$$

где $\alpha^+(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ – точные значения решение $y(x,\varepsilon)$, $z(x,\varepsilon)$ задачи (8), (9) при $x = a$, причем они в силу теоремы 1 представимы в виде

$$[\![y|\square]\!]_{x=a} \equiv \alpha(\varepsilon) = y_0(\varepsilon) + \varepsilon \cdot y_1(\varepsilon) + \dots + \varepsilon^N \cdot y_N(\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{25}$$

$$[\![z|\square]\!]_{x=a} \equiv \beta(\varepsilon) = z_0(\varepsilon) + \varepsilon \cdot z_1(\varepsilon) + \dots + \varepsilon^N \cdot z_N(\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где $y_k(\varepsilon) = y_k(\tau_0, a_0, c_0, \varepsilon)$, $z_k(\varepsilon) = z_k(\tau_0, a_0, c_0, \varepsilon)$ конечны при $\varepsilon \to 0$ и $y_k(\varepsilon)$, $z_k(\varepsilon)$ линейно зависят от a_k и c_k, $k = 1,2,\dots$

2.2.Построение асимптотики в зоне вырожденного решения. Зона вырожденного решения $y(t)$ занимает часть $[x_0,b]$ отрезка $[a,b]$. В этой зоне уравнение (8) перепишем в виде

$$\varepsilon \cdot \frac{dz}{dx} = F(x,y,z), \qquad \frac{dy}{dx} = z(x,\varepsilon) \tag{26}$$

и определим решение этой системы в правой зоне $x_0 \leq x \leq b$ при начальных условиях

$$z(x_0,\varepsilon) = \beta^+(\varepsilon), \qquad y(x_0,\varepsilon) = \alpha^+(\varepsilon). \tag{27}$$

где $\alpha^+(\varepsilon)$, $\beta^+(\varepsilon)$ точные значения решение $y(x,\varepsilon)$, $z(x,\varepsilon)$ задачи (8), (9) при $x = x_0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия I–IV, тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *задача (26), (27) при* $x_0 \le x \le b$ *имеет единственное решение* $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$, *причем это решение допускает следующее асимптотическое представление:*

$$z(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k (z_k(x,\varepsilon) + v_k(\tau,\varepsilon)) + s_1(x,\varepsilon),$$

(28)

где функции *удовлетворяют неравенствам*

$|\Pi_k(\tau,\varepsilon)| \le K \cdot e^{-\bar{\nu}\tau}$, $|v_k(\tau,\varepsilon)| \le K \cdot e^{-\bar{\nu}\tau}$, $\tau \ge 0$,

$|s_1(x,\varepsilon)| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}$, $|s_2(x,\varepsilon)| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}$.

где $k \ge 1; K, \bar{\nu}$ *– постоянные величны.*

Доказательство проводится методом интегральных уравнений.

3. Асимптотика решения краевой задачи. Рассмотрим краевую задачу (5),(6). Как уже показано, вспомогательная задача (8),(9) имеет единственное решение $y(x,c,\varepsilon)$. Выберем теперь параметр c так,чтобы $y(x,c,\varepsilon)$ удовлетворяло краевым условиям (6). Это приводит к следующему уравнению относительно c:

$$y(b,c,\varepsilon) = \beta. \tag{29}$$

Докажем,что уравнение (29) разрешима относительно c. Точка c_0^0 из (17) удовлетворяет уравнению (29) с точностью $O(\varepsilon^\sigma)$:

$$y(b,c_0^0,\varepsilon) = \beta + O(\varepsilon^\sigma).$$

Можно убедиться, что $\dfrac{dy(b,c_0,\varepsilon)}{dc_0} \ne 0$. Тогда, в достаточно малой окрестности точка c_0^0 найдется единственная точка $c(\varepsilon)$ такая, что будет иметь место

$$y(a,c(\varepsilon),\varepsilon) = \alpha, \qquad y(b,c(\varepsilon),\varepsilon) = \beta.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия I-IV. Тогда в некоторой малой окрестности точки* $c = c_0^0$ *существует единственная точка* $c = c(\varepsilon)$ *такая, что решение* $y(x,$

$c(\varepsilon)$, ε) задачи (8),(9) *является единственным решением $y(x,\varepsilon)$ краевой задачи* (5),(6) *и для решения $y(y,\varepsilon)$ краевой задачи* (5),(6) *имеет место представления (23) и (28).*

Рассмотрим исходную краевую задачу (1),(2). Из теорем 1-3 следует существование и единственность решения $x(y,\varepsilon)$ задачи (1), (2) и, что решение $x(y,\varepsilon)$ задачи (1), (2) из малой окрестности прямой $x = a$ медленно попадает в малую окрестность вырожденного решения $\overline{x(y)}$ задачи (3). Таким образом, предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(y,\varepsilon) = \bar{x}(y), \qquad a < y \le b$$

имеет место только в том случае, если параметры c_0^0, α и $\bar{y}(a)$ связаны между собой формулой (17).

ЛИТЕРАТУРА

1 Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1958. – Т. 121, № 5. – С. 778-781.

2 Вишик М.И., Люстерник Л.А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. – 1960. – Т. 132, № 6. – С. 1242-1245.

3 Касымов К.А. Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // УМН. – 1962. – Т. 17, № 5. – С. 187-188.

4 Касымов К.А. О задаче с начальным скачком для нелинейных систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. – 1968. – Т. 179, № 2. – С. 275-278.

5 Жакупов Ж.Н. Асимптотическое поведение решений краевой задачи для некоторого класса систем нелинейных уравнений, содержащих малый параметр // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 5. – С. 42-49.

6 Биядилов Н.Б. Сингулярно возмущенное квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка с внутренним начальным скачком // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1990. – № 5. – С. 42-49.

7 Дауылбаев М.К. Об асимптотике решения одной задачи для интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Вестник АН КазССР. – 1990. – № 11. – С. 21-22.

8 Нургабылов Д.Н. Асимптотическое разложение решения краевой задачи с внутренним начальным скачком для нелинейных систем дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984. – № 3. – С. 62-65.

9 Касымов К.А., Нургабылов Д.Н. Асимптотическое разложение решения краевой задачи с внутренним начальным скачком // Материалы II Всесоюз. конф. по асимптотическим методам. – Алма-Ата: Наука, 1979. – Т. 1. – С. 97-99.

10 Касымов К.А., Нургабылов Д.Н. О краевых задачах с внутренним начальным скачком // Вестник АН КазССР. – 1984. – № 1. – С. 56-69.

11 Бернштейн С.Н. Sur les equations du calculi des variations // Ann. Ec. Norm. 29 (1912), 431-485.

REFERENCES

1 Vishik M.I., Ljusternik L.A. Ob asimptotike reshenija kraevyh zadach dlja kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij // DAN SSSR. – 1958. – T. 121, № 5. – S. 778-781.

2 Vishik M.I., Ljusternik L.A. O nachal'nom skachke dlja nelinejnyh differencial'nyh uravnenij, soderzhashhih malyj parametr // DAN SSSR. – 1960. – T. 132, № 6. – S. 1242-1245.

3 Kasymov K.A. Ob asimptotike reshenija zadachi Koshi s bol'shimi nachal'nymi uslovijami dlja nelinejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij, soderzhashhih malyj parametr // UMN. – 1962. – T. 17, № 5. – S. 187-188.

4 Kasymov K.A. O zadache s nachal'nym skachkom dlja nelinejnyh sistem differencial'nyh uravnenij, soderzhashhih malyj parametr // DAN SSSR. – 1968. – T. 179, № 2. – S. 275-278.

5 Zhakupov Zh.N. Asimptoticheskoe povedenie reshenij kraevoj zadachi dlja nekotorogo klassa sistem nelinejnyh uravnenij, soderzhashhih malyj parametr // Izv. AN KazSSR. Cer. fiz.-mat. nauk. – 1971. – № 5. – S. 42-49.

6 Bijadilov N.B. Singuljarno vozmushhennoe kvazilinejnoe differencial'noe uravnenie vtorogo porjadka s vnutrennim nachal'nym skachkom // Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. nauk. – 1990. – № 5. – S. 42-49.

7 Dauylbaev M.K. Ob asimptotike reshenija odnoj zadachi dlja integro- differencial'nyh uravnenij s malym parametrom pri starshej proizvodnoj // Vestnik AN KazSSR. – 1990. – № 11. – S. 21-22.

8 Nurgabylov D.N. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenija kraevoj zadachi s vnutrennim nachal'nym skachkom dlja nelinejnyh sistem differencial'nyh uravnenij // Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. – 1984. – № 3. – S. 62-65.

9 Kasymov K.A., Nurgabylov D.N. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenija kraevoj zadachi s vnutrennim nachal'nym skachkom // Materialy II Vsesojuz. konf. po asimptoticheskim metodam. – Alma-Ata: Nauka, 1979. – T. 1. – S. 97-99.

10 Kasymov K.A., Nurgabylov D.N. O kraevyh zadachah s vnutrennim nachal'nym skachkom // Vestnik AN KazSSR. – 1984. – № 1. – S. 56-69.

11 Bernshtejn S.N. Sur les equations du calculi des variations // Ann. Ec. Norm. 29 (1912), 431-485.

Резюме

Д. Н. Нұрғабыл[1], А. Қалибай[1], А. Б. Уаисов[3]

([1]І. Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған қ.;

[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.)

ТӘУЕЛСІЗ АЙНЫМАЛЫ БОЙЫНША БАСТАПҚЫ СЕКІРІС ҚҰБЫЛЫСЫ БАР

ЕРЕКШЕ АУЫТҚЫҒАН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕР

Жұмыста оң жағы С. Н. Бернштейннің шартын қанағаттандырмайтын екінші ретті бейсызықты жай дифференциалдық теңдеулер үшін ерекше ауытқыған шекаралық есеп қарастырылған. Шешімнің және оның туындыларының асимптотикалық бағамдары туралы теорема дәлелденген. Тәуелсіз айнымалы бойынша бастапқы секірістер анықталған.

Кілт сөздер: кіші параметр, сингулярлық ауытқу, бастапқы секіріс, қарапайым дифференциальдық теңдеу, шекаралық есеп.

Summary

D. N. Nurgabyl[1], A. Kalibay[1], A. B. Uaissov[2]

([1]I. Zhansugurova Zhetisu State University, Taldikorgan;

[2]Al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY-VALUE PROBLEMS POSSESSING THE PHENOMENA OF INITIAL JUMP ON INDEPENDENT OF THE VARIABLE

In this work is considered the point-to-point singularly perturbed boundary-value problem for the nonlinear differential equation of the second order, in which right part don`t satisfy S. N. Bernshtein`s conditions. In article considered theorem about asymptotically estimations of solution and its derivatives, and also determined initial jumps on independent of the variable.

Keywords: small parameter, singularno the indignant, initial jump, the ordinary differential equation, a regional task.

Поступила 26.03.2013 г