И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

КРИТЕРИЙ *S*-САМОСОПРЯЖЕННОСТИ НЕОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В данной работе установлен критерий *S* самосопряжености необратимого оператора Штур-ма-Лиувилля.

Ключевые слова: критерий S, самосопряженность, необратимый оператор.

Тірек сөздер: S критерийі, жалқылық, қайтымсыз оператор.

Keywords: criterion S, self conjugacy, irreversible operator.

1. Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x); x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми краевыми условиями, где a_{ij} (i = 1,2; j = 1,2,3,4) – произвольные комплексные постоянные.

Это означает, что хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} (i,j = 1,2,3,4) \tag{3}$$

граничной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}a_{24} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

отличен от нуля.

Область определения оператора L обозначим через $D(L)$, т.е.

$$D(L) = \{y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]: U_i(y) = 0\} (i = 1,2) \tag{5}$$

Пусть L^+ -оператор формально сопряженный к оператору L, т.е. такой оператор, что $\forall y(x) \in D(L)$ и $z(x) \in D(L^+)$ имеет место формула

$$(Ly,z)=(y,L^{+}z),$$

где $D(L^{+})$ – область определения сопряженного оператора L^{+}, (.,.) – скалярное произведение пространства $L^2(0,1)$, определенное формулой

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)\bar{g}(x)\,dx, \qquad \forall f,g\in L^2(0,1)$$

Через S обозначим оператор внутреннего отклонения

$$Su(x)=u(1-x), \forall x\in[0,1], u(x)\in L^2(0,1) \tag{6}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. При каких условиях на коэффиценты $a_{i,j}$ имеет место формула

$$SL=L^{+}S. \tag{7}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Операторов Штурма-Лиувилля, удовлетворяющих условию (7), назовем S-самосопряженными.

Основным результатом работы является теорема 1, которая доказывается с помощью лемм 1-4. Подробное доказательства леммы 1 дано в работе [2]. Лемма 2 является следствием леммы 1, ее можно доказать и с помощью прямых вычислений. Лемму 3 можно доказать так же, как в работе [4, с. 293]. Необратимость оператора L означает, что $\Delta(0)=\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}=0$ [см. 3, с. 35].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функциями экспоненциального типа называются целые функции, порядок которых меньше 1 либо равен 1, но тогда тип конечен [1, с. 42].

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z)=e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа [2, с. 31].

ЛЕММА 2. Если

$$\Delta_{ij}=a_{1i}a_{2j}-a_{2i}a_{1j}\,(i,j=1,2,3,4) \tag{3}$$

то имеет место формула, $\Delta_{13}\Delta_{24}+\Delta_{14}\Delta_{32}-\Delta_{12}\Delta_{34}=0,$ которая является следствием леммы 1.

ЛЕММА 3. Если $\Delta_{12}\neq 0$, то краевые условия (2) эквивалентны краевым условиям

$$\begin{cases}\Delta_{12}y(0)+\Delta_{32}y(1)+\Delta_{42}y'(1)=0,\\ \Delta_{12}y'(0)+\Delta_{13}y(1)+\Delta_{14}y'(1)=0;\end{cases}$$

а сопряженными к ним являются

$$-\bar{\Delta}_{14}z(0)-\Delta_{12}z(1)+\bar{\Delta}_{42}z'(0)=0,$$

$$\bar{\Delta}_{32} z'(0) - \bar{\Delta}_{13} z(0) + \bar{\Delta}_{14} z'(1) = 0;$$

где Δ_{ij} – миноры матрицы (4), вычисляемые по формулам (3).

ЛЕММА 4. Если имеет место формула (7), то имеет место равенства

1) $(\Delta_{12} + \Delta_{34})^{-} = k(\Delta_{12} + \Delta_{34});$ 2) $\bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13};$

3) $(\Delta_{14} + \Delta_{32})^{-} = k(\Delta_{14} + \Delta_{32});$ 3) $\bar{\Delta}_{42} = k\Delta_{42}.$

где k – некоторое комплексное число, удовлетворящее условию $|k| = 1$, Δ_{ij} -миноры матрицы (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы $L^{+} = SLS = S^{-1}LS$ следует, что операторы L^{+} и L подобны, поэтому существует такое число k^{*} [см. лемму 1], что $\Delta^{*}(\lambda) = k^{*}\Delta(\lambda)$ где $\Delta^{*}(\lambda)$ – характеристическая функция сопряженного оператора L^{+} [3, с. 35]. Тогда $\Delta^{*}(\lambda) = C \times \overline{\Delta(\bar{\lambda})} = k^{*}\Delta(\lambda), C - const.$

$$\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{34} + \bar{\Delta}_{13}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + (\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32})\cos\lambda - \bar{\Delta}_{42}\lambda\sin\lambda =$$

$$= k\left[\Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\lambda - \Delta_{42}\lambda\sin\lambda\right].$$

Отсюда выводим формулы 1)-4).

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

ТЕОРЕМА 1. Для необратимого оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x); x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми краевыми условиями, формула

$$SL = L^{+}S \quad (7)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$\bar{\Delta}_{12} = e^{i\varphi}\Delta_{12},$ $\bar{\Delta}_{13} = e^{i\varphi}\Delta_{13},$ $\bar{\Delta}_{14} = e^{i\varphi}\Delta_{32},$ $\bar{\Delta}_{24} = e^{i\varphi}\Delta_{24},$ $\bar{\Delta}_{34} = e^{i\varphi}\Delta_{34},$

где $0 \le \varphi < 2\pi$, а оператор S определен формулой(6).

Доказательство теоремы легко следует из вышеизложенных лемм 1-4.

ЛИТЕРАТУРА

1 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – С. 176.

2 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

3 Марченко В.А: Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Науква думка, 1977. – С. 329.

4 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939. – 717 с.

REFERENCES

1 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. С. 176.

2 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени. Известия АН РК. Серия физ.-мат. 2000. № 3. С. 29-34.

3 Марченко В.А: Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Науква думка, 1977. С. 329.

4 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939. 717 с.

Резюме

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ҚАЙТЫМСЫЗ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ *S* ЖАЛҚЫЛЫҒЫ

Бұл еңбекте қайтымсыз Штурм-Лиувилл операторының S жалқылығының үзілді кесілді шарттары табылған.

Тірек сөздер: S критерийі, жалқылық, қайтымсыз оператор.

Summary

I. O. Orazov, A. Sh. Shaldanbayev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

CRITERION S-SELF-ADJOINT IRREVERSIBLE STURM-LIOUVILLE

In this work the criterion of Sсамосопряжености of the irreversible operator of Storm Liouville is established.

Keywords: criterion S, self conjugacy, irreversible operator.

Поступила 15.10.2013г.