И. О. ОРАЗОВ, А.Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

КРИТЕРИЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В данной работе получен критерий самосопряженности обратимого оператора Штурма-Лиу-вилля, отличающиеся от известных признаков Э. Л. Айнса и Н. Левинсона.

Ключевые слова: критерий, самосопряженность, обратимый оператор.

Тірек сөздер: критерий, жалқылық, қайтымды оператор.

Keywords: criterion, self conjugacy, irreversible operator.

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); \;\; x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i_1}y(0) + a_{i_2}y'(0) + a_{i_3}y(1) + a_{i_4}y'(1) = 0 \;\; (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми краевыми условиями, где a_{ij} (i = 1,2; j = 1,2,3,4) – произвольные комплексные постоянные, λ – спектральный параметр.

Число λ называется собственным значением оператора L, если в области определения D(L) опе-ратора L существует функция y(x) # 0,такая что Ly = λy. Эта функция y(x) называется собственной функцией оператора L,соответствующей собственному значению λ. Таким образом, собственные значения оператора L, суть те значения параметра λ, при которых однородная краевая задача

$$Ly = \lambda y, \qquad U_i[y] = 0 \;\; (i = 1,2) \tag{3}$$

имеет нетривиальные решения; эти нетривиальные решения являются соответствующими собственными функциями.

Обозначим через

$$y_1(x;\lambda), \qquad y_2(x;\lambda) \tag{4}$$

фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (1) определенную начальными условиями

$$y_j^{(\nu-1)}(0;\lambda)=\begin{cases}0 \text{ при } j\neq\nu,\\ 1 \text{ при } j=\nu\end{cases}\quad i,\nu=1,2. \tag{5}$$

Из общих теорем о решениях линейных дифференциальных уравнений вытекает [1, с. 47], что для любого фиксированного значения x из [0,1] функций (4) будут целыми аналитическими функ-циями параметра λ.

Положим

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}U_1(y_1) & U_1(y_2)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2)\end{vmatrix}. \tag{6}$$

В силу предыдущего Δ(λ) – целая аналитическая функция переменного λ. Она называется характеристическим определителем оператора L. В нашем случае Δ(λ) имеет следующий вид

$$\Delta(\lambda)=\Delta_{12}+\Delta_{34}+\Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}+(\Delta_{14}+\Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda}-\Delta_{42}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}, \tag{7}$$

где

$$\Delta_{ij}=a_{1i}a_{2j}-a_{2i}a_{1j},\qquad (i,j=1,2,3,4). \tag{8}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задача Штурма-Лиувилля (1)–(2) называется самосопряженной, если $\forall u(x),v(x)\in D(L)$ имеет место равенство

$$(Lu,v)=(u,Lv), \tag{9}$$

где $D(L)=\{C^2(0,1)\cap C^1[0,1];\ U_i[y]=0, i=1,2\}$, $(\,,.)$ – означает скалярное произведение пространства $L^2(0,1)$, т.е. $\forall f,g\in L^2(0,1)$

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти необходимые и достаточные условия выполнения равен-ства (9).

2. ВСПОМАГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ [2, с. 42] не имеет нулей на всей комп-лексной плоскости, то

$$f(z)=e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа [3, с. 31].

ЛЕММА 2. Если

$$\Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0,$$

и имеет место формула (9), то имеет место следующие равенства

1) $\overline{\Delta_{12}} + \overline{\Delta_{34}} = k(\Delta_{12} + \Delta_{34})$; 2) $\overline{\Delta}_{14} + \overline{\Delta}_{32} = k(\Delta_{14} + \Delta_{32})$;

3) $\overline{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}$; 4) $\overline{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$.

где $k = \dfrac{\overline{\Delta(0)}}{\Delta(0)}$, $\quad \Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$.

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i} \times a_{1j} (i,j = 1,2,3,4).$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0,$$

то задача Штурма-Лиувилля (1)–(2) самосопряжена тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{\Delta}_{13}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}},$$

$$\frac{\overline{\Delta}_{34} + \overline{\Delta}_{32}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} = \frac{\Delta_{12} + \Delta_{32}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}},$$

$$\frac{\overline{\Delta}_{32} + \overline{\Delta}_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} = \frac{\Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0,$$

то задача Штурма-Лиувилля (1)–(2) самосопряжена тогда только тогда, когда имеет место формулы

1) $\overline{\Delta}_{12} = k\Delta_{34}$; 2) $\overline{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}$; 3) $\overline{\Delta}_{14} = k\Delta_{14}$;

4) $\overline{\Delta}_{32} = k\Delta_{32}$; 5) $\overline{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$; 6) $\overline{\Delta}_{34} = k\Delta_{12}$,

где $k = \dfrac{\overline{\Delta(0)}}{\Delta(0)}$, $\quad \Delta(0) = \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}$.

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} (i,j = 1,2,3,4).$$

Эти теоремы полностью решают поставленную задачу для обратимого оператора Штурма-Лиувилля.

ЛИТЕРАТУРА

1 Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – С. 474.

2 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – С. 176.

3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

REFERENCES

1 Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. С. 474.

2 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. С. 176.

3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени. Известия АН РК. Серия физ.-мат. 2000. № 3. С. 29-34.

Резюме

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ҚАЙТЫМДЫ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ЖАЛҚЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ

Бұл еңбекте қайтымды Штурм-Лиувилл операторының жалқылығының үзілді-кесілді шарттары табыл-ған, олар көпке белгілі Э.Л. Айнс пен Н Левинсонның шарттарынан мүлдем өзгеше.

Тірек сөздер: критерий, жалқылық, қайтымды оператор.

Summary

I. O. Orazov, A. Sh. Shaldanbayev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

THE CRITERION OF REVERSIBLE SELF-ADJOINT STURM-LIOUVILLE

In this work the criterion of self-conjugacy of the reversible operator of the Storm Liouville, E. L. Aynsas and N. Levinson different from known signs is received.

Keywords: criterion, self conjugacy, irreversible operator.

Поступила 15.10.2013г.