*И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ*

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

# ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

**Аннотация.** В настоящей работе установлен критерии самосопряжености обратимого оператора Штурма-Лиувилля.

**Ключевые слова:** критерий, самосопряженность, обратимый оператор.

**Тірек сөздер:** критерий, жалқылық, қайтымды оператор.

**Keywords:** criterion, self conjugacy, irreversible operator.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ оператор Штурма-Лиувилля *L*, порожденного дифференциальным выражением

$$ly = y''(x); \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

и двумя ($i$ = 1,2) линейно независмыми краевыми условиями

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \ \ (i = 1,2), \tag{2}$$

где $y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$, $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ – произвольные комплексные постоянные.

Число λ называется собственным значением оператора *L*, если в области определения *D*(*L*) оператора *L* существует функция $y \neq 0$ такая, что

$$Ly = \lambda y. \tag{3}$$

Эта функция *y* называется собственной функцией оператора *L*, соответствующей собственному значению λ.

Пусть *l*(*y*) и

$$U_1(y) = 0, \qquad U_2(y) = 0 \tag{4}$$

– дифференциальное выражение и краевые условия порождающие оператор *L*. Так как собственная функция *y* должна принадлежать области определения оператора *L*, то она должна удовлетворять условиям (4). Кроме того,

$$Ly = l(y),$$

следовательно, из (3) имеем

$$l(y) = \lambda y. \tag{5}$$

Таким образом, собственные значения оператора $L$, суть те значения параметра λ, при которых однородная краевая задача

$$l(y) = \lambda y, \qquad U_i(y) = 0, \qquad (i = 1,2) \tag{6}$$

имеет нетривиальные решения; эти нетривиальные решения являются соответствующими собственными функциями [1, с. 24].

Оператор $L$ называется самосопряженным, если $\forall y \in D(L)$ имеет место равенство [1, с. 22].

$$(Ly, z) = (y, Lz), \tag{7}$$

где (.,.) – скалярное произведение пространства $L^2(0,1)$, т.е. $\forall f, g \in L^2(0,1)$

$$(f, g) = \int_0^1 f - \bar{g}\, dx,$$

$$D(L) = \{y(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]: \; U_i(y) = 0, \qquad (i = 1,2)\}. \tag{8}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Если оператор $L$ обратим, т.е. существует обратный оператор $L^{-1}$, то при каких условиях на коэффиценты $a_{ij}$ ($i$ = 1,2; $j$ = 1,2,3,4) он является самосопряженным, т.е. при каких условиях на $a_{ij}$ имеет место формула

$$(Ly, z) = (y, Lz), \tag{7}$$

для всех $y, z \in D(L)$.

Основная идея этой работы такова. Оператор Штурма-Лиувилля плотно определен в простран-стве $L^2(0,1)$, поэтому существует сопряженный оператор [2, с. 129]. Мы предполагаем, что существует обратный оператор $L^{-1}$, который определен на всем пространстве $H$ и ограничен, то $(L^*)^{-1}$ существует, определен на всем $H$ и ограничен. При этом

$$(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*.$$

Поэтому мы сначала построим обратный оператор $L^{-1}$, затем, переходя к сопряжению, на-ходим оператор $(L^*)^{-1}$ по вышеуказанной формуле. Далее, используя методику работы [2, с. 145-148], найдем граничные условия сопряженного оператора $L^*$. По этим формулам найдем граничные условия второго сопряженного оператора $L^{**}$. Поскольку $\overline{L} = L^{**}$, то $L \subset \overline{L} = L^{**}$, т.е. на гладких функциях операторы $L$ и $L^{**}$ совпадают.Следовательно, если оператор $L$ самосопряжен, т.е. $L^* = L$, то $L^{**} = L^*$, по крайней мере, на плотном многообразии в *H*. Сравнивая граничные условия операторов $L^{*\bullet}$ и $L^{\bullet}$, получим основной результат настоящей работы. Технические сложности, возникающие при этом, преоделеваются с помощью леммы 2.

Наши результаты отличаются от ранее известных результатов Айнса Э. Л. [5, с. 293] и Левин-сона Н. [6, с. 323] как по форме, так и по методам его получения.

*Автор благодарит профессора Садыбекова М.А за стимулирующие беседы и обсуждения.*

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ [4, с. 42] не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где $a$, $b$ – некоторые комплексные числа [3, с. 31].

ЛЕММА 2. Если

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} (i,j = 1,2,3,4),$$

где $a_{ij}$ ($i$ = 1,2; $j$ = 1,2,3,4) – комплексные числа, то имеет место формула

$$\Delta_{13} \times \Delta_{24} + \Delta_{14} \times \Delta_{32} - \Delta_{12} \times \Delta_{34} = 0, \tag{9}$$

которая является следствием леммы 1.

ЛЕММА 3. Если

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0, \tag{10}$$

то оператор сопряженный к оператору $L$ имеет следующий вид

$$L^{\dagger}{}_{*}\, z = -z^{\dagger *}(x);\ x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} U_1^*(z) = \bar{\Delta}_{13}z(0) - (\bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{34})z'(0) - \bar{\Delta}_{13}z(1) - (\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{14}) \times z'(1) = 0 \\ U_2^*(z) = (\overline{\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34}})z(0) - (\overline{\Delta_{32} + \Delta_{42}})z'(0) + (\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{32})z(1) - (\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{24})z'(1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} (i,j = 1,2,3,4)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0,$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} (i,j = 1,2,3,4)$, то оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) самосопря-жен тогда и только тогда, когда

1) $\bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{34}$; 2) $\bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13}$; 3) $\bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{14}$; 4) $\bar{\Delta}_{32} = k\Delta_{32}$; 5) $\bar{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$; 6) $\bar{\Delta}_{34} = k\Delta_{12}$.

где $k \neq 0$ и $|k| = 1$, т.е. некоторое комплексное чило, отличное от нуля и лежащая на единичной окружности.

## ЛИТЕРАТУРА


1 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

2 Садыбеков М.А. Элементы теорий линейных дифференциальных операторов. – Шымкент, 2007. – 165 с.

3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

4 Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

5 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939. – 717 с.

6 Коддингтон Э.Л., Левинсон Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.


## REFERENCES


1 Najmark M.A. Linejnye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 528 s.

2 Sadybekov M.A. Jelementy teorij linejnyh differencial'nyh operatorov. Shymkent, 2007. 165 s.

3 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni. Izvestija AN RK. Serija fiz.-mat. 2000. № 3. S. 29-34.

4 Leont'ev A.F. Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. 176 s.

5 Ajns Je.L. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Har'kov, 1939. 717 s.

6 Koddington Je.L., Levinson N. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. M.: IL, 1958. 474 s.


## Резюме

*А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов*

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫ ЖАЛҚЫЛЫҒЫНЫҢ БІР КРИТЕРИЙІ ТУРАЛЫ

Бұл еңбекте Штурм-Лиувилл операторының жалқылығының үзілді-кесілді шарттары табылдған.

**Тірек сөздер:** критерий, жалқылық, қайтымды оператор.

**Summary**

*I. O. Orazov, A. Sh. Shaldanbayev*

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

ON A CRITERION OF SELF-ADJOINT STURM-LIOUVILLE

In the real work it is established criteria of self-conjugacy of the reversible operator of Storm Liouville.

**Keywords:** criterion, self conjugacy, irreversible operator.

*Поступила 15.10.2013г.*