И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Аннотация. Бұл еңбекте $Ay = y'(x) + q(x)y(1-x)$, $x \in (0,1)$, $y(0) = 0$ операторының ұлғайтылған спектралді есебінің түпкі векторлар системасының $L^2(0,1)$ кеңістігінде толымды екені көрсетілген, мұндағы $q(x)$ – комплекс мәнді үзіксіз функция.

Ключевые слова: спектральные свойства, задача Коши, уравнение, аргумент.

Тірек сөздер: спектралды қасиеттер, Коши есебі, теңдеу, аргумент.

Keywords: spectral properties, the Cauchy problem, equation, argument.

Пусть $H = L^2(0,1)$ – гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|_0 = \left(\int_0^1 \left|f(x)^2 dx\right|\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

$$Ay = \frac{d}{dx}y + q(x)y(1-x),\ D(A) = \{y \in C^1(0,1) \cap C[0,1], y(0) = 0\} \tag{2}$$

оператор заданный в этом пространстве. Главная часть оператора A не имеет спектра, поэтому представляется целособразным исследование спектральной задачи

$$\begin{cases} Ay = y'(x) + q(x)y(1-x) = \lambda y(1-x),\ \ x \in (0,1) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (3)\ (4)$$

Полагая $z(x) = y(1-x)$, имеем $z'(x) = -y'(1-x)$, $y'(x) = -z'(1-x)$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\begin{cases} -z'(1-x) + q(x)z(x) = \lambda z(x), \\ z(1) = 0. \end{cases} \qquad (5)\ (6)$$

Сначала исследуем главную часть уравнения (5)

$$\begin{cases} -z'(1-x) = \lambda z(x), \\ \quad z(1) = 0. \end{cases} \tag{7) (8}$$

Продифференцировав уравнение (7) по x, получим уравнение Штурма-Лиувилля:

$$z''(1-x) = \lambda z'(x), \quad z''(x) = \lambda z'(1-x) = -\lambda^2 z(x),$$

$$\begin{cases} -z''(x) = \lambda^2 z(x), \\ \quad z(1) = 0. \end{cases} \tag{9) (10}$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$z(x) = A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x \tag{11}$$

Подставив (11) в (10), имеем

$$A \cdot \cos\lambda + B \cdot \sin\lambda = 0 \tag{12}$$

Для нахождения коэффициентов A, B не хватает данных. Полагая $x = 1$ из (7)+(8), получим второе граничное условие

$$z'(0) = 0 \tag{13}$$

Теперь подставим (11) в (13):

$$z'(x) = -\lambda A \cdot \sin\lambda x + \lambda B \cdot \cos\lambda x\,, \quad z'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0\,.$$

Таким образом, $B = 0$, коэффициент A – может принимать произвольное значение. Из уравнения (12) с учетом $B = 0$ найдем собственные значения:

$$A \cdot \cos\lambda = 0\,,\ A \neq 0 \Rightarrow \cos\lambda = 0\,,\ \lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}\,,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно собственными функциями задачи (9)+(10) является

$$z_n(x) = A_n \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x\,,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{14}$$

Коэффициентов A_n найдем из условия нормировки.

$$1 = \|z_n(x)\|^2 = |A_n|^2 \int_0^1 \cos^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x dx = \frac{|A_n|^2}{2}\int_0^1 [1 + \cos(2n\pi + \pi)x]dx =$$

$$\frac{|A_n|^2}{2}\left[x + \frac{\sin(2n\pi + \pi)x}{2n\pi + \pi}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{|A_n|^2}{2}, \Rightarrow A_n = \sqrt{2}.$$

Среди собственных функции (14) могут быть «лишние», т.е. такие, которые выражаются через линейные комбинации остальных. Заменим, что

$$z_{-n}(x) = A_{-n}\cos\left(-n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x = A_{-n}\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)x = \frac{A_{-n}}{A_{n-1}} \cdot z_{n-1}(x).$$

Следовательно, можно ограничиться лишь неотрицательными индексами n = 0,1,2,…, отри-цательные индексы ничего нового не дают. Поэтому собственными значениями и собственными функциями задачи (9)+(10)+(13) будут соответственно:

$$\lambda_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n = 0,1,2,..., \tag{15}$$

$$z_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, \quad n = 0,1,2,... \tag{16}$$

Исследуем полученную систему (16) на полноту. Пусть для некоторой функции $f(x) \in L^2(0,1)$ имеет место равенства

$$\int_0^1 f(x) - z_n(x)dx = 0$$

т.е.

$$\int_0^1 f(x)\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)xdx = 0, \quad n = 0,1,2,... \tag{17}$$

Заменив n на n–1, получим

$$\int_0^1 f(x)\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)xdx = 0, \quad (n = 1,2,...) \tag{18}$$

Сложив (17) и (18), имеем

$$\int_0^1 f(x)\cos\frac{\pi x}{2} \cdot \cos n\pi x dx = 0, \quad (n = 1,2,...) \tag{19}$$

Полагая n = 0 в (17), видим, что

$$\int_0^1 f(x)\cos\frac{\pi x}{2}dx = 0.$$

Следовательно, равенство (19) имеет место при всех (n = 0,1,2,…). В силу полноты системы функции $\{\cos n\pi x, \ n = 0,1,2,...\}$ в пространстве $L^2(0,1)$ из (19) следует $f(x)\cos\frac{\pi x}{2} = 0$ почти всю-ду в (0,1), т.е. $f(x) = 0$ почти всюду в (0,1).

Среди собственных функции (16) могут быть лишние, поэтому проверим их, подставив в уравнение (7).

$$z_n'(x) = -\sqrt{2}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$

$$z_n^{/}(1-x)=-\sqrt{2}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left[\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)(1-x)\right]=-\sqrt{2}\left[\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x-\right.$$

$$\left.\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x\right]\cdot\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-(-1)^n\sqrt{2}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x=-$$

$$(-1)^n\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)z_n(x),\Rightarrow -z_n^{/}(1-x)=(-1)^n\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot z_n(x);\qquad (n=0,1,2,...)$$

$$z_n(1)=\sqrt{2}\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,\ (n=0,1,2,...).$$

Нами доказана следующая лемма 1.

ЛЕММА 1. Спектральная задача

$$\begin{cases} -z'(1-x)=\lambda z(x), \\ z(1)=0. \end{cases} \tag{7) (8}$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_n=\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-1)^n,\ (n=0,1,2,...) \tag{15}$$

и соответствующих им собственных функции (векторов)

$$z_n(x)=\sqrt{2}\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x,\ (n=0,1,2,...) \tag{16}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$.

Теперь вернемся к спектральной задаче (5)+(6)

$$Bz=-z'(1-x)+q(x)z(x),\ D(B)=\left\{z\in C^1(0,1)\cap C[0,1], z(1)=0\right\}$$

Пусть $B_0z=-z'(1-x)$, $D(B_0)=\left\{z\in C^1(0,1)\cap C[0,1], z(1)=0\right\}$, тогда оператор B_0 – самосопря-жен в пространстве $L^2(0,1)$. Этот факт следует из нижедоказуемой леммы.

ЛЕММА 2. Если собственные векторы линейного оператора *A*, соответствующие ненулевым собственным значениям, ортогональны и полны в пространстве *H*, то оператор *A* самосопряжен в этом пространстве, при условии, что *KerA* = 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия *KerA* = 0 соответствие между *D*(*A*) и *R*(*A*) взаимнооднозначно. Из равенств

$$A\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\ \ \lambda_n\neq 0$$

имеем $\varphi_n=A^{-1}\lambda_n\varphi_n=\lambda_nA^{-1}\varphi_n$, $A^{-1}\varphi_n=\dfrac{\varphi_n}{\lambda_n}$, Пусть $z\{\varphi_n\}-$ линейная оболочка ортонормированных собственных векторов оператора A и φ_N, ψ_M произвольные элементы этой оболочки, тогда

$$\left(A^{-1}\varphi_N, \psi_M\right)=\left(A^{-1}\sum_1^N\alpha_i\varphi_i, \sum_1^M\beta_i\varphi_i\right)=\left(\sum_1^N\frac{\alpha_i}{\lambda_i}\varphi_i, \sum_1^M\beta_i\varphi_i\right)=\sum_1^N\alpha_i\beta_i=\left(\varphi_N, A^{-1}\psi_M\right)=$$
$$\left(\sum_1^N\alpha_i\varphi_i, \sum_1^M\frac{\alpha_i}{\lambda_i}\varphi_i\right),$$

где $N \le M$.

Следовательно, оператор A^{-1} определен на всюду плотном множестве и симметричен. Кроме того,

$$\left\|A^{-1}\varphi_N\right\|^2=\sum_1^N\left|\frac{\alpha_i}{\lambda_i}\right|^2\le\frac{1}{|\lambda_1|^2}\sum_1^N|\alpha_i|^2=\frac{\|\varphi_N\|^2}{|\lambda_1|^2},\quad \left\|A^{-1}\varphi_N\right\|\le\frac{1}{|\lambda_1|}\|\varphi_N\|,$$

для любого элемента из линейной оболочки $z\{\varphi_n\}$. По теореме о продолжении оператор A^{-1} распространяется на все пространства H, поэтому самосопряжен, тогда A тоже самосопряжен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $KerA = 0$ можно заменить условием «если оператор симметрический». Действительно, если это так и $Az = 0$, то $0=(Az,\varphi_n)=(z,A\varphi_n)=\lambda_n(z,\varphi_n)\Rightarrow(z,\varphi_n)=0$ $0=(Az,\varphi_n)=(z,A\varphi_n)=\lambda_n(z,\varphi_n)\Rightarrow(z,\varphi_n)=0$ для любого собственного вектора φ_n. В силу полноты $\{\varphi_n\}$ в H отсюда следует $z = 0$, т.е. $KerA = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\lambda_n \to \infty$, то оператор A^{-1} вполне непрерывен.

$$A^{-1}f=\sum_1^\infty\frac{f_n}{\lambda_n}\cdot\varphi_n$$

Полагая $A_N=\sum_1^N\frac{(\circ\,\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n$, имеем

$$\left\|\left(A^{-1}-A_N\right)f\right\|^2=\sum_{N+1}^\infty\left|\frac{f_n}{\lambda_n}\right|^2\le\frac{1}{|\lambda_{N+1}|^2}\|f\|^2\Rightarrow\left\|A^{-1}-A_N\right\|\le\frac{1}{|\lambda_{N+1}|}\to 0\circ$$

Покажем, что оператор B_0 – симметрический

$$(B_0u,v)=\int_0^1[-u'(1-x)]\cdot\overline{v(x)}dx=\int_0^1\overline{v(x)}du(1-x)=\overline{v(x)}u(1-x)\Big|_0^1-\int_0^1\overline{v}'(x)u(1-x)dx=\begin{vmatrix}1-x=t\\ x=1-t\\ dx=-dt\end{vmatrix}=$$
$$-\int_0^1\overline{v(1-t)}'\,u(t)dt=-\int_0^1u(t)\overline{v(1-t)}'\,dt=(u,B_0v).$$

Теперь продолжим исследование оператора B.

$$B = B_0 + Q\,,$$

где Q – оператор умножения на $q(x)$. При определенных условиях имеет место равенства.

$$B = B_0\left(I + B_0^{-1}Q\right) = \left(I + QB_0^{-1}\right)B_0\,.$$

$$B^{-1} = \left[I + B_0^{-1}Q\right]^{-1} B_0^{-1} = \left(I + R\right)\cdot B_0^{-1}\,, \tag{17}$$

где

$$R = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(B_0^{-1}Q\right)^n$$

ЛЕММА 3.

(а) Оператор B_0^{-1} вполне непрерывен и самосопряжен;

(в) Для любого $p \succ 1$ имеет место неравенство $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^p} \prec \infty$, где λ_n^{-1} – собственные значения оператора B_0^{-1}.

(г) $\left\|A_0^{-1}\right\| \le \frac{2}{\pi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше мы доказали, что оператор B_0 – симметричный, тогда в силу за-мечаний 1, 2 и формулы (15) оператор B_0^{-1} самосопряжен и вполне непрерывен. Следует отметить, что

$$B_0^{-1}f = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(f, z_n)}{\lambda_n}\cdot z_n(x)$$

где $\lambda_n = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cdot(-1)^n$, $z_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x$.

(в) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^p} \le \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\pi^p\left(n + \frac{1}{2}\right)^p} \prec +\infty;$

(г) $\left\|B_0^{-1}f\right\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(f, z_n)}{\lambda_n}\right|^2 \le \frac{1}{|\lambda_0|^2}\|f\|^2, \Rightarrow \left\|B_0^{-1}\right\| \le \frac{2}{\pi}$.

ЛЕММА 4. Если

$$\max_{0\le x\le 1}|q(x)| \prec \frac{\pi}{2}\,,$$

то существует оператор

$$\left[I + B_0^{-1}Q\right]^{-1} = I + R, \tag{18}$$

где оператор R – вполне непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея место оценки

$$\left\|B_0^{-1}Qy\right\| \le \left\|B_0^{-1}\right\| \cdot \left\|Qy\right\| \le \frac{2}{\pi}\left\|Qy\right\| \le \frac{2}{\pi}\max_{0\le x\le 1}\left|q(x)\right| \cdot \left\|y\right\|.$$

Поэтому $\left\|B_0^{-1}Q\right\| \le \frac{2}{\pi}\max\limits_{0\le x\le 1}\left|q(x)\right| \prec 1$, следовательно операторный ряд

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\left(B_0^{-1}Q\right)^m$$

сходится равномерный операторной норме. Поскольку операторы $\left(B_0^{-1}Q\right)^m$ – вполне непрерывны, то оператор

$$R = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(B_0^{-1}Q\right)^m$$

также вполне непрерывен.

ЛЕММА 5 [1]. Пусть оператор A в гильбертовом пространстве H имеет вид $A = (I+R)S$, где S, R – компактные операторы, причем S – самосопряженный и его собственные значения $\lambda_n \ne 0$ (n = 1,2,…) с учетом кратностей удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\lambda_n\right|^p \prec \infty \tag{19}$$

при некотором $p \succ 0$. Тогда оператор A – полный.

ТЕОРЕМА 1. Если $q(x)$ непрерывная функция удовлетворяющая условию

$$\max_{0\le x\le 1}\left|q(x)\right| \prec \frac{\pi}{2}, \tag{20}$$

то оператор B

$$Bz = -z'(1-x) + q(x)z(x), \tag{21}$$

$$D(B) = \left\{z(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1], z(1) = 0\right\} \tag{22}$$

является полным в пространстве $H = L^2(0,1)$.

Наш оператор B обратим, поэтому областью его значений является все пространства $H = L^2(0,1)$, поэтому имеет место теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Если $q(x)$ комплексная непрерывная функция удовлетворяющая условию,

$$\max_{0\le x\le 1}|q(x)|\prec \frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

то система корневых векторов оператора,

$$B=-S\frac{d}{dx}+Q,\ D(B)=\{z(x)\in C^1(0,1)\cap C[0,1], z(1)=0\} \tag{24}$$

где $Sz(x)=z(1-x)$, $Qz(x)=q(x)z(x)$, полна в пространстве $H=L^2(0,1)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая условию,

$$\max_{0\le x\le 1}|q(x)|\prec \frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

то система ортонормированных собственных векторов оператора B,

$$B=-S\frac{d}{dx}+Q,\ D(B)=\{z(x)\in C^1(0,1)\cap C[0,1], z(1)=0\},$$

где $Sz(x)=z(1-x)$, $Qz(x)=q(x)z(x)$, образует ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q(x$ вещественная функция, то оператор Q самосопряжен. В силу леммы 3 оператор

$$B_0=-S\frac{d}{dx},\ D(B_0)=\{z(x)\in C^1(0,1)\cap C[0,1], z(1)=0\}$$

тоже самосопряжен. Тогда оператор $B = B_0 + Q$ будет также самосопряженным. Если имеет место (23), то существует обратный оператор B^{-1}, который является вполне непрерывным [см. 17]

$$B^{-1}=\left[I+B_0^{-1}Q\right]^{-1}=(I+R)\cdot B_0^{-1}$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы Гильберта-Шмидта.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $z(x)$ является собственный функцией для задачи (5)+(6), то функция $y(x) = z(1-x)$ является собственный для задачи (3)+(4).

ЛИТЕРАТУРА

1 Келдыш М.В. О полноте собственных функции некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. – 1971. – 26. – № 4. С. 15-41.

2 Треногин В.Л. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.

REFERENCES

1 Keldysh M.V. *O polnote sobstvennyh funkcii nekotoryh klassov nesamosoprjazhennyh linejnyh operatorov. UMN*, **1971**. 26. №4, 15-41 (in Russ.).

2 Trenogin V.L. *Funkcional'nyj analiz*. –M.: Nauka, **1980**(in Russ.).

Резюме

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

АУЫТҚУШЫ АРГУМЕНТТІ БІР ТЕҢДЕУ ҮШІН

КОШИ ЕСЕБІНІҢ СПЕКТРАЛДЫ ҚАСИЕТТЕРІ

Бұл еңбекте $Ay = y'(x) + q(x)y(1-x)$, $x \in (0,1)$, $y(0) = 0$ операторының ұлғайтылған спектралды есебінің түпкі векторлар жүйесінің $L^2(0,1)$ кеңістігінде толымды екені көрсетілген, мұндағы $q(x)$ – комплекс мәнді үзіксіз функция

Тірек сөздер: спектралды қасиеттер, Коши есебі, теңдеу, аргумент.

Summary

I. O. Orazov. A. Sh. Shaldanbayev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

SPECTRAL PROPERTIES OF THE CAUCHY PROBLEM

FOR ONE EQUATION WITH REJECT THE ARGUMENT

In the real work completeness of system of root vectors of the operator is proved in the generalized statement, where complex continuous function.

Keywords: spectral properties, the Cauchy problem, equation, argument.

Поступила 15.10.2013г.