И. О. ОРАЗОВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент)

ФОРМУЛА СЛЕДА ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Аннотация

В настоящей работе вычислен след вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля в пространстве Крейна М. Г.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, пространство Крейна, собственные значения, собствен-ные функций.

Кілт сөздер: Штурма-Лиувилль операторы, Крейн кеңістігі, дәл мағыналар, дәл функциялар.

Keywords: Sturm-Liouville operator, Krein space, their own values, their own functions.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ вольтеррова оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2), \tag{2}$$

где $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ – произвольные комплексные постоянные.

Напомним, что оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) называется вольтерровым, если он не имеет собственных значений на всей комплексной плоскости.

Пусть оператор S определен формулой [см. 1, с. 42]

$$Su(x) = u(1 - x), \qquad x \in [0,1]. \tag{3}$$

Предположим, что оператор SL самосопряжен в пространстве H, тогда обратный оператор $(SL)^{-1}$ будет вполне непрерывным и самосопряженным оператором с полной и ортогональной системой собственных векторов в пространстве H. Более того, он является ядерным оператором, поэтому имеет конечный след [2, с. 125].

Вольтерровость оператора (1)-(2) обеспечивается условиями [см 3, с. 30]

$$\Delta_{24}=0, \Delta_{14}+\Delta_{32}=0, \qquad \Delta_{13}=0, \qquad \Delta_{12}+\Delta_{34}\neq 0, \tag{4}$$

где $\Delta_{ij}=a_{1i}a_{2j}-a_{2i}a_{1j} \quad (i,j=1,2,3,4).$

Условия самосопряженности оператора *SL* отличаются от этих условий [см.п.б) теоремы 1], поэтому класс изучаемых нами операторов не пуст.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Вычислить след оператора $(SL)^{-1}$, где *L* вольтерровый оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2), а оператор *S* определен формулой (3).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ интегрального оператора

$$Kf(x)=\int_0^1 k(x,t)\, f(t)\,dt, \tag{5}$$

где $f(t)\in L^2(0,1)$ и

$$\int_0^1\int_0^1 |k(x,t)|^2\,dx\,dt<\infty. \tag{6}$$

ЛЕММА 1. Оператор *SK* самосопряжен в пространстве *H* тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$K(x,t)=\overline{K(1-t,1-x)},$$

где оператор *S* определен формулой (3).

При условии (6), оператор (5) является компактным в пространстве *H*.

ЛЕММА 2. Если

а) ядро $K(x,t)$ является замкнутым;

б) $K(x,t)=\overline{K(1-t,1-x)}$;

в) имеет место неравенство (6),

то нормированные собственные функций $\varphi_n(x), n=1,2,\ldots$ оператора *SK* и нормированные собственные функций $\psi_n(x)$ оператора *KS* образуют ортонормированный базис пространства *H*.

Эта лемма является следствием теоремы Гилберта-Шмидта.

ЛЕММА 3. При условиях леммы 2 имеет место разложения а) $K(x,1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|\psi_n(x)|^2;$

б) $K^{*}(x,1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|\varphi_n(x)|^2,$

где $\psi_n(x)\ (n=1,2,\ldots..)$ ортонормированные собственные векторы оператора $KS;\ \ KS\psi_n=\lambda_n\psi_n$, а $\varphi_n(x)(n=1,2,\ldots..)$ ортонормированные собственные векторы оператора $SK;\ \ SK\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$.

ЛЕММА 4. Если

а) $\int_0^1|k(x,t)|^2\,dxdt<\infty;$

б) $K(x,t)=\overline{K(1-t,1-x)};$

в) ядро $K(x,t)$ является замкнутым;

г) оператор K [см.ф. (5)] ядерный ;

д) собственные функции операторов SK и KS непрерывны на отрезке [0,1] и ограничены по совокупности, то имеет место формула

$$tr(KS)=tr(SK)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\int_0^1K(x,1-x)dx.$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если

а) $\Delta_{24}=0,\Delta_{13}=0,\Delta_{14}+\Delta_{32}=0,\Delta_{12}+\Delta_{34}\neq 0;$

б) $\bar{\Delta}_{12}=e^{i\theta}\Delta_{12},\qquad \bar{\Delta}_{34}=e^{i\theta}\Delta_{34},\qquad \bar{\Delta}_{14}=-e^{i\theta}\Delta_{14},$

где

то оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, оператор SL имеет полную и ортогональную систему собственных векторов в пространстве H, оператор $(SL)^{-1}$ самосопряжен и компактен, а его след вычисляется по формуле

$$tr(SL)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\int_0^1G(x,1-x)dx=-\frac{1}{4},$$

где $G(x,t)$ – ядро функций Грина оператора Штурма-Лиувилля, т.е. является ядром обратного оператора L^{-1}, оператора Штурма-Лиувилля L.

Отметим, что по теореме Лидского [2, с. 131] след вольтеррова и ядерного оператора всегда равен нулью. Наш оператор рассматривается в пространстве Крейна со скалярным произведением $[u,v]=(Su,v)$, поэтому след отличен от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргу-ментами // Математический журнал. – Алматы, 2004. – Т. 4, № 3. – С. 41-48.

2 Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом про-странстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Изв. АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

REFERENCES

1 Kal’menov T.Sh., Ahmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. K spektral’noi teorii uravnenii s otklonyayushim argumentami // Matematicheskii zhurnal. – Almaty, 2004. – T. 4, № 3. – 41-48 (in Russ.).

2 Gohberg I.C., Krein M.G. Vvedenie v teoriyu lineinyh nesamosopryazhennyh operatorov v gil’bertovom prostranstve. – M.: Nauka, 1965. – 448 (in Russ.).

3 Kal’menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O structure spectra kraevoi zadachi Shturma-Liuvillya na konechnom otrezke vremeni // Izv. AN RK. Serya phis.-math. – 2000. – № 3. – S. 29-34 (in Russ.).

Резюме

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.)

КРЕЙН КЕҢІСТІГІНДЕГІ ВОЛТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ОПЕРАТОРЫ ІЗІНІҢ ФОРМУЛАСЫ

Бұл еңбекте волтерлі Штурм-Лиувилль операторының Крейн кеңістігіндегі ізі табылған.

Кілт сөздер: Штурма-Лиувилль операторы, Крейн кеңістігі, дәл мағыналар, дәл функциялар.

Summary

I. O. Orazov, A. Sh.Shaldanbaev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent)

THE TRACE FORMULA OF VOLTERRA STURM-LIOUVILLE OPERATOR IN THE KREIN SPACE

In this paper we evaluate the following Volterra Sturm-Liouville operator in the Krein space.

Keywords: Sturm-Liouville operator, Krein space, their own values, their own functions.

Поступила 22.04.2013 г.