УДК 517.956.4

М. О. ОРЫНБАСАРОВ

РЕШЕНИЕ ОСОБОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕНИИ ОБЛАСТИ

Методом специальных бипараболических потенциалов и сингулярных интегральных уравнений доказано регулярная разрешимость одной краевой задачи для бипараболического уравнения в ограниченной области.

П.1. Постановка задачи.

Требуется найти регулярное решение $U(x,t)$ уравнения

$$\delta^2 U = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) U = F(x,t) \qquad (1)$$

в области $\Omega_t = LXR_t \equiv \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < \infty\}$ удовлетворяющее начальным условием

$$\delta^k U /_{t=0} = f_k(x) \quad k = (0,1) \qquad (2)$$

и краевым условием:

$$U_{xx} /_{x=0} = \varphi_2(t) \qquad (3)$$

$$U_{xxx} /_{x=0} = \varphi_3(t) \qquad (4)$$

$$U_{xx} /_{x=l} = \psi_2(t) \qquad (5)$$

$$U_{xxx}/_{x=l}=\psi_3(t) \qquad (6)$$

где заданные функции

$$F(x,t)\in C_{x}^{\alpha},{}_{t}^{0}(\Omega_t), \qquad f_0(x)\in C_x^3(L) \qquad (7)$$

$$f_1(x)\in C(L), \quad \varphi_2(t)\in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(R_+)$$

$$\varphi_3(t)\in C(R_+), \qquad \psi_2(t)\in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(R_+),$$

$$\psi_3(t)\in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(R_+).$$

Кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$f_0''(0)=\varphi_2(0), \qquad f_0'''(0)=\varphi_3(0),$$

$$f_0''(l)=\psi_2(0), \qquad f_0'''(l)=\psi_3(0). \qquad (8)$$

Известно, что однородное бипараболическое уравнение $\delta^2 U=0$ имеет два линейно-независимых решения $G(x,t)$, $tG(x,t)$, где $G(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Легко проверить, что частное решения неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (2) имеет вид:

$$U_0(x,t)=\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)(t-\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi+$$

$$+\int_0^l f_0(\xi)G(x-\xi,t)d\xi+\int_0^l f_1(\xi)tG(x-\xi,t)d\xi. \quad (9)$$

Поэтому при помощи замены $U=V(x,t)+U_0(x,t)$ краевую задачу (1)-(6) можно привести к задаче для однородного уравнения с нулевыми начальными условиями. В дальнейшем для удобства будем считать, что $F(x,y)=0$ $f_k(x)=0$. Следует отметить, что хотя уравнение (1) линейное и область изменения аргумента x – ограниченный отрезок $[0,l]$ метод Фурье к краевой задаче (1)-(6) неприменим. Краевую задачу (1)-(6) будем решать методом специальных потенциалов.

П.2. Специальные потенциалы и их свойства.

Рассмотрим следующие специальные потенциалы, определение на концах $x=0$ и $x=l$

$$W_{01}(x,t)=\int_0^t\sigma_1(\tau)(t-\tau)G(x,t-\tau)d\tau$$

$$W_{02}(x,t)=\int_0^t\sigma_2(\tau)Q(x,t-\tau)d\tau$$

$$W_{11}(x,t)=\int_0^t\mu_1(\tau)(t-\tau)G(x-l,t-\tau)d\tau \quad (11)$$

$$W_{12}(x,t)=\int_0^t\mu_1(\tau)Q(x-l,t-\tau)d\tau$$

где $Q(x-\xi,t)=\int_0^t G(x-\xi,t-z)dz$. Легко проверить, что $Q(x,t)$ также является решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)$$

относительно потенциалов $W_{ij}(x,t)$ справедливы следующие утверждения:

Лемма 1. Если функции $\sigma_i(t)\in C(R_+)$ и ограничены, то при $x\neq 0$ функции

$$W_{0i}(x,t)\in C_x^{\infty},{}_t(\Omega) \text{ и } \delta^2 W_{0i}=0.$$

Кроме того

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial^k W_{0i}}{\partial x^k}/_{x=0}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\partial^k W_{0i}}{\partial x^k}(0,t) & \text{при } k=0,2\\ 0 & \text{при } k=1\\ \pm\dfrac{1}{2a^4}\sigma_i(t) & \text{при } k=3\end{cases} \qquad (13)$$

Знак «+» соответствует $i=1$, знак «–» соответствует $i=2$.

Доказательство. При $x\neq 0$, фундаментальное решение $G(x,t)\in C_{x,t}^{\infty}$ и для любых целых r и s справедлива оценка $D_x^r D_t^s G(x,t-\tau)=$

$$=\frac{M}{\left(\sqrt{t-\tau}\right)^{r+2s+1}}e^{-\delta\frac{x^2}{t-\tau}}.$$

Поэтому функции $W_{0i}(x,t)$, определяемые интегралами, зависящие от параметра по формуле (10), также бесконечно дифференцируемые по x и t и применяя оператор δ^2, имеем

$$\delta^2 W_{01} = \delta \int_0^t \sigma_1(\tau)\delta[(t-\tau)G(x,t-\tau)]d\tau =$$

$$= \int_0^t \sigma_1(\tau)\delta G(x,t-\tau)d\tau = 0.$$

В силу равенства (12) получим

$$\delta^2 W_{02} = \delta \int_0^t \sigma_1(\tau)\delta[Q(x,t-\tau)]d\tau = 0.$$

Переходим к доказательству предельного соотношения (13). Сначала докажем предельное соотношение для потенциала W_{01}. Дифференцируя по x под знаком интеграла, найдем

$$\frac{\partial W_{01}}{\partial x} = -\frac{1}{2a^2}\int_0^t \sigma_1(\tau)xC(x,t-\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 W_{01}}{\partial x^2} =$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int_0^t \sigma_1(\tau)\left[1-\frac{x^2}{2a^2(t-\tau)}\right]G(x,t-\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial^3 W_{01}}{\partial x^2} = \frac{1}{4a^4}\times$$

$$\times\int_0^t \sigma_1(\tau)\left[-\frac{3x}{(t-\tau)}+\frac{x^3}{2a^2(t-\tau)^2}\right]G(x,t-\tau)d\tau.$$

Очевидно, что производные $\frac{\partial W_{01}}{\partial x}, \frac{\partial^2 W_{01}}{\partial x^2}$ сходятся равномерно. Поэтому, переходя к пределу интеграла имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial W_{01}}{\partial x} = 0,$$

$$\lim_{x0}\frac{\partial^2 W_{01}}{\partial x^2} = -\frac{1}{4a^3}\int_0^t \frac{\sigma_1(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \qquad (14)$$

остается вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3 W_{01}}{\partial x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4a^4}\times$$

$$\times\int_0^t \frac{\sigma_1(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\left[3x-\frac{x^3}{2a^2(t-\tau)}\right]e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

Сделаем замену переменных

$$\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} = z, \qquad dz = \frac{xdz}{4a(t-\tau)^{3/2}}. \quad (15)$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3 W_{01}}{\partial x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2a^4\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \sigma_1\left(t-\frac{x^2}{4a^2 z}\right)[3-2z^2]e^{-z^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2a^4\sqrt{\pi}}\sigma_1(t)\int_0^{\infty}[3-2z^2]e^{-z^2}dz = \frac{\sigma_1(t)}{2a^4}.$$

Теперь докажем предельное соотношение (13) для потенциала W_{02}. Дифференцируя по x под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial W_{02}}{\partial x} = \int_0^t \sigma_2(\tau)\left\{\int_0^{t-\tau}\frac{x}{2a^2(t-\tau+z)}G(x,t-\tau+z)\right\}d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 W_{02}}{\partial x^2} = \int_0^t \sigma_2(\tau)\left\{\int_0^{t-\tau}\frac{\partial^2 G(x,t-\tau-z)}{\partial x^2}dz\right\}d\tau =$$

$$= \left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial G}{\partial z}\right| =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int_0^t \sigma_2(\tau)\left\{\int_0^{t-\tau}\frac{\partial G}{\partial z}\right\}d\tau = \frac{1}{a^2}\int_0^t \sigma_2(\tau)G(x,t-\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial^3 W_{02}}{\partial x^3} = \frac{1}{a^2}\int_0^t \sigma_2(\tau)\frac{-x}{2a^2(t-\tau)}G(x,t-\tau)d\tau.$$

Легко заметить, что производные $\frac{\partial W_{02}}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 W_{02}}{\partial x^2}$ сходятся равномерно, поэтому переходя к пределу, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial W_{02}}{\partial x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 W_{02}}{\partial x^2}=\frac{1}{2a^3}\int_0^t\frac{\sigma^2(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}. \qquad (17)$$

Производные $\frac{\partial^3 W_{02}}{\partial x^3}$ является тепловым потенциалом двойного слоя. При помощи замены (15) производные $\frac{\partial^3 W_{02}}{\partial x^3}$ можно представить в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3 W_{02}}{\partial x^3}=\frac{1}{a^4\sqrt{\pi}}\lim_{x\to 0}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\sigma_2\left(t-\frac{x^2}{4a^2 z}\right)e^{-z^2}dz.$$

Откуда найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^3 W_{02}}{\partial x^3}=-\frac{1}{2a^4}\sigma_2(t). \qquad (18)$$

Лемма 1 доказана полностью.

Лемма 2. Если функции $\mu_i(t)\in C(R_+)$ и ограничены, то при $x\neq l$ функции $W_{1i}(x,t)\in C^{\infty}_{x,t}(\Omega)$ и $\delta^2 W_{1i}=0$.

Кроме того

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial^k W_{1i}}{\partial x^k}=\begin{cases}\frac{\partial^k W_{1i}}{\partial x^k}(1,t) & k=0,2\\ 0 & k=1\\ \mp\frac{1}{4a^2}\mu_i(t) & k=3\end{cases} \qquad (19)$$

Знак «−» соответствует i = 1, знак «+» соответствует i = 2.

Лемма 2 доказывается совершенно аналогично, как в лемма 1.

П.3. Сведение краевой задачи (1)–(6) к системе интегральных уравнений типа Вольтера.

Решение краевой задачи (1)-(6) будем искать в виде

$$U(x,t)=2a^4\int_0^t\sigma_1(\tau)(t-\tau)G(x,t-\tau)d\tau-$$
$$-2a^4\int_0^t\sigma^2(\tau)Q(x,t-\tau)d\tau-$$
$$-2a^4\int_0^t\mu_1(\tau)(t-\tau)G(x-l,t-\tau)d\tau+$$
$$+2a^4\int_0^t\mu_2(\tau)Q(x-l,t-\tau)d\tau, \qquad (20)$$

где $\sigma_i(t),\mu_i(t)$ неизвестные непрерывные функции.

В силу леммы 1-2 нетрудно убедиться, что функция $U(x,t)$, определяемая равенством (20), удовлетворяет однородную ($F(x,t)=0$) бипараболическому уравнению (1) и нулевыми начальными ($f_k(x)=0$) начальными условиями (2). Неизвестные функции $\sigma_i(t)$ и $\mu_i(t)$ подберем так, чтобы функция $U(x,t)$ была удовлетворена условиям (3)-(4) и (5)-(6).

Подставляя $U(x,t)$ в краевые условия (3)-(4) и учитывая предельное соотношение (13), а также в краевые условия (5)-(6) и учитывая предельное соотношение (19) относительно неизвестных функций $\sigma_i(t)$ и $\mu_i(t)$, получим следующую систему интегральных уравнений

$$-\frac{a}{2}\int_0^t\frac{\sigma_1(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}-a\int_0^t\frac{\sigma_2(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}+$$
$$+\frac{a}{2}\int_0^t\frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[1-\frac{l^2}{2a^2(t-\tau)}\right]e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$
$$+a\int_0^t\frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=\varphi_2(t);$$
$$\sigma_1(t)+\sigma_2(t)+$$
$$+\frac{1}{24a}\int_0^t\frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\left[3l-\frac{l^3}{2a^2(t-\tau)}\right]e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\frac{\mu_2(\tau)l}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=\varphi_3(t);$$
$$-\frac{a}{2}\int_0^t\frac{\sigma_1(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[1-\frac{l^2}{2a^2(t-\tau)}\right]e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau-$$
$$-a\int_0^t\frac{\sigma_2(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$
$$+\frac{a}{2}\int_0^t\frac{\mu_1(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau+a\int_0^t\frac{\mu_2(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau=\psi_2(t);$$

$$\frac{1}{4a}\int_0^t \frac{\sigma_1(\tau)}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\left[-3l+\frac{l^3}{2a^2(t-\tau)}\right]e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \frac{\sigma_2(\tau)l}{\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\mu_1(t)+\mu_2(t)=\psi_3(t). \qquad (21)$$

Вводя операторную запись, системы уравнений (21) можно записать в виде

$$\begin{cases} -2aI^{1/2}\sigma_1 - aI^{1/2}\sigma_2 + \frac{a}{2}K_1\mu_1 + aK_2\mu_2 = \varphi_2(t) \\ \sigma_1+\sigma_2+\frac{1}{4a}H_1\mu_1+\frac{1}{2a}H_2\mu_2=\varphi_3(t) \\ -\frac{a}{2}K_1\sigma_1 - aK_2\sigma_2 + \frac{a}{2}I^{1/2}\mu_1 + aI^{1/2}\mu_2 = \psi_2(t) \\ -\frac{1}{4a}H_1\sigma_1+\frac{1}{2a}H_2\sigma_2+\mu_1(t)+\mu_2(t)=\psi_3(t) \end{cases} \qquad (22)$$

где $I^{1/2}$ – интегральный оператор дробного порядка 1/2 в смысле Римана-Лиувилля. K_i – интегральные операторы с ядрами

$$K_1(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}-\frac{l^2}{2a^2(t-\tau)^{3/2}}\right]e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$K_2(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} \qquad (23)$$

H_i – интегральные операторы с ядрами

$$h_1(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{3l}{\sqrt{t-\tau}}-\frac{l^3}{2a^2(t-\tau)^{5/2}}\right]e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

$$h_2(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{l}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}} \qquad (24)$$

Нетрудно заметить, что ядра $K_i(t-\tau)$, определяемые равенством (23) и ядра $H_i(t-\tau)$, определяемые равенством (24), бесконечно дифференцируемые ограниченные функции. Поэтому операторы K_i и H_i – регулярные интегральные операторы Вольтера.

4. Решение системы интегральных уравнений (22).

Система уравнений (22) является интегральными уравнениями Вольтера смешанного (первого и второго) рода. Для того, чтобы приводить ее к системе интегральных уравнений второго рода применяем оператор дробного дифференцирования $D^{1/2}$ к первой и третьей уравнению системы (22).

Тогда, учитывая известные равенства:

$$D^{1/2}I^{1/2}\sigma=\sigma.$$

Относительно неизвестных $\sigma_i(t)$ и $\mu_i(t)$, получим следующую систему интегральных уравнений:

$$2\sigma_1(t)+\sigma_2(t)=-\frac{1}{a}D^{1/2}\varphi_2+\frac{1}{2}D^{1/2}K_1\mu_1+D^{1/2}K_2\mu_2$$

$$\sigma_1(t)+\sigma_2(t)=\varphi_3(t)-\frac{1}{4a}H_1\mu_1-\frac{1}{2a}H_2\mu_2$$

$$\frac{1}{2}\mu_1(t)+\mu_2(t)=\frac{1}{a}D^{1/2}\psi_2+\frac{1}{2}D^{1/2}K_1\sigma_1+D^{1/2}K_2\sigma_2$$

$$\mu_1(t)+\mu_2(t)=\psi_3(t)+\frac{1}{4a}H_1\sigma_1-\frac{1}{2a}H_2\sigma_2 \qquad (25)$$

Отсюда совместно решая первое и второе уравнения, и третье уравнения системы (25) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_1(t)&=\Phi_1(t)+K_{11}\mu_1+K_{12}\mu_2 \\ \sigma_2(t)&=\Phi_2(t)+K_{21}\mu_1+K_{22}\mu_2 \\ \mu_1(t)&=\Psi_1(t)+H_{11}\sigma_1+H_{12}\sigma_2 \\ \mu_2(t)&=\Psi_2(t)+H_{21}\sigma_1+H_{22}\sigma_2 \end{aligned} \qquad (26)$$

где

$$\Phi_1(t)=-\varphi_3-\frac{1}{a}D^{1/2}\varphi_2,\ \Phi_2(t)=2\varphi_3+\frac{1}{a}D^{1/2}\varphi_2$$

$$\Psi_1(t)=2\psi_3-\frac{2}{a}D^{1/2}\psi_2,\ \Psi_2(t)=-\psi_3+\frac{2}{a}D^{1/2}\psi_2 \qquad (27)$$

Свойства оператора дробного порядка следует, что если функции $\varphi_2(t),\psi_2(t)\in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(R_+)$, то $D^{1/2}\varphi_2, D^{1/2}\psi_2\in C(R_+)$ и ограничены. Поэтому функции $\Phi_i(t),\Psi_i(t)$, определяемые равенством (27), являются непрерывными и ограниченными.

Операторы K_{ij} и H_{ij} как линейные комбинации регулярных интегральных операторов.

H_i и $D^{1/2}K_i$ также являются регулярными операторами Вольтера. поэтому система интегральных уравнений Вольтера 2-го порядка (26) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Кроме того, так как свободные члены $\Phi_i(t), \Psi_i(t) \in C(R_+)$, то найденные решения $\sigma_i(t), \mu_i(t) \in C(R_+)$ и ограничены.

Тем самым доказана регулярная разрешимость краевой задачи (1)-(6).

В итоге имеем:

Теорема. Если заданные функции $F(x,t)$, $f_k(x), \varphi_i(t), \psi_i(t)$ $(i = 2,3)$ удовлетворяют условиям (7)-(8), то краевая задача (1)-(6) имеет регулярное решение, определяемое формулой (20), где неизвестны функции $\sigma_i(t)$, $\mu_i(t)$ находятся из системы интегральных уравнений (26).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орынбасаров М.О.* О разрешимости особой краевой задачи для бипараболического уравнения // Докл. НАН РК. 2004. №1. С. 5-11.

2. *Орынбасаров М.О.* Теория тепловых потенциалов и ее применение. Изд. «Қазақ университеті», 2005. С. 70.

Резюме

Арнайы бипараболалық потенциалдар мен сингулярлы интегралдық теңдеулер әдісімен шектелген облыста бипараболалық теңдеу үшін шекаралық есептің регулярлық шешімі бар болатыны дәлелденген.

Summary

In this article has proved the meshed of special biparabolic potentials and singular integral equations regular solvability of the boundary – value problem for biparabolic equation in a bounded domain.

Поступила 19.09.09г.