УДК 517.956

Н.А. ОРШУБЕКОВ

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО СМЕШАННО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной работе показано, что однородная задача Трикоми для вырождающегося многомерного смешанно гиперболо-параболического уравнения имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены [1]. Насколько нам известно, их многомерные аналоги мало исследованы [2].

Пусть D – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ коноидами

$$K_0 : |x| = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2},$$

$$K_1 : |x| = 1 - \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2},$$

$0 \le t \le (\frac{2+p}{4})^{\frac{2}{2+p}}$ а при $t<0$ -цилиндрической поверхностью $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = t_0 < 0$, где $|x|$-длина вектора $x = (x_1,...,x_m)$, $p = const > 0$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$. Части коноидов K_0, K_1, ограничивающих области D^+, обозначим через S_0, S_1. Пусть $S = \{(x,t) : t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$, $\Gamma_0 = \{(x,t) : t = 0, |x| = 1\}$

В области D рассмотрим модельное смешанно гиперболо-параболического уравнения с многомерным оператором Геллерстедта

$$0 = \begin{cases} t^p \Delta_x u - u_{tt}, & t>0, \\ \Delta_x u - u_t, & t<0, \end{cases} \qquad (1)$$

где Δ_x-оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \ge 2$.

Следуя ([1]) в качестве многомерного аналога Трикоми рассмотрим следующую

Задача Т. Найти решение уравнения (1) в области D при $t \ne 0$, из класса $C(\overline{D}/\Gamma_0) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{S_0} = 0, u\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (2)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим

$$r, \theta_1,...,\theta_{m-1}, t, r \ge 0,\ 0 \le \theta_1 < 2\pi,$$

$$0 \le \theta_i \le \pi,\ i = 2,3,...,m-1.$$

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ –система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$,

$$(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2),$$

$$\theta = (\theta_1,...,\theta_{m-1})$$

Через $\overline{\tau}^k_n(r)$, $\overline{\nu}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y^k_{n,m}(\theta)$, соответственно функций

$$\tau(r,\theta) = u(r,\theta,0),\ \nu(r,\theta) = u_t(r,\theta,0).$$

Имеет место

Теорема. Задача Т. Имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Доказательство. В сферических координатах уравнения (1) в области D^+ имеет вид

$$t^p u_{rr} + \frac{m-1}{r} t^p u_r - \frac{t^p}{r^2} \delta u - u_{tt} = 0 . \qquad (3)$$

При $t \to -0$ на S получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r} \tau_r - \frac{1}{r^2} \delta\tau = \nu(r,\theta), \qquad (4)$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j} (\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}),$$

$$g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,...$, каждому из которых соответствует ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи Т. в области D^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \qquad (5)$$

где $\overline{u}^k_n(r,t)$-функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (3) и (4), использую ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ [3], будем иметь

$$t^p \overline{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r} t^p \overline{u}^k_{nr} - \overline{u}^k_{ntt} - \frac{\lambda_n}{r^2} t^p \overline{u}^k_n = 0, \qquad (6)$$

$$\overline{\tau}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r} \overline{\tau}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2} \overline{\tau}^k_n = \overline{\nu}^k_n(r),\ 0 < r < 1, \qquad (7)$$

при этом первое условие краевого условия (2) запишется в виде

$$\overline{u}^k_n \left[r, \left(\frac{(2+p)}{2} r \right)^{\frac{2}{2+p}} \right] = 0,$$

$$0 \le r \le \frac{1}{2},\ r = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,... \qquad (8)$$

В (6)-(8) произведя замену переменных $\overline{u}^k_n(r,t) = r^{(1-m)/2} u^k_n(r,t)$ и положив затем $r = r,\ x_0 = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}$, соответственно получим

$$L_\alpha u^k_{\alpha,n} \equiv u^k_{\alpha,nrr} - u^k_{\alpha,nx_0x_0} - \frac{\alpha}{x_0} u^k_{\alpha,nx_0} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} u^k_{\alpha,n} = 0, \qquad (9_\alpha)$$

$$\tau^k_{nrr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} \tau^k_n = \nu^k_n(r), 0 < r < 1, \qquad (10)$$

$$u^k_{\alpha,n}(r,r) = 0,\ 0 \le r \le \frac{1}{2},\ k = \overline{1,k_n},$$

$$n = 0,1,...,\ 0 < \alpha = \frac{p}{2+p} < 1, \qquad (11)$$

$$\overline{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4,$$

$$\tau^k_n(r) = r^{(1-m)/2} \overline{\tau}^k_n(r), \nu^k_n(r) = r^{(1-m)/2} \overline{\nu}^k_n(r).$$

Наряду с уравнением (9_α), рассмотрим уравнение

$$L_0 u^k_{0,n} \equiv u^k_{0,nrr} - u^k_{0,nx_0x_0} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} u^k_{0,n} = 0. \qquad (9_0)$$

Как показано в [4,5] существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (9_α) и (9_0).

Утверждение 1. Если $u^{k,1}_{0,n}(r,x_0)$-решение задачи Коши для уравнения (9_0), удовлетворяющее условию

$$u^{k,1}_{0,n}(r,0) = \tau^k_n(r), \frac{\partial}{\partial x_0} u^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0, \qquad (12)$$

то функция

$$u^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 u^{k,1}_{0,n}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv$$

$$\equiv \frac{\gamma_\alpha}{2} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) D^{-\frac{\alpha}{2}}_{0x_0^2} \left[\frac{u^k_{0,n}(r,x_0)}{x_0^2} \right]. \qquad (13)$$

при $\alpha > 0$ является решением уравнения (9_α) с условием (12), где $\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})$, $\Gamma(z)$-гамма-функция, D^α_{0t}-оператор Римана-Лиувилля

[6], а $q \geq 0$-наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q \geq m-1$.

Утверждение 2 . Если $u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$-решение задачи Коши для уравнения (9_0), удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,n}(r,0)=\frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u_{0,n}^{k,1}(r,0)=0,$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=$$

$$=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_{0x_0}^{1}u_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\right.$$

$$\left.-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right]\equiv$$

$$\equiv\gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma(q-\frac{\alpha}{2}+1)D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \quad (14)$$

является решением уравнения (9_α) с начальными данными

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0,\lim_{x_0\to 0}x_0^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_0}u_{\alpha,n}^{k,2}=\nu_n^k(r), \quad (15)$$

Теперь рассмотрим задачу (9_α),(11) для которого имеет место соотношение (10). Ее решение будет искать в виде $u_{\alpha,n}^k(r,x_0)=u_{\alpha,n}^{k,1}+u_{\alpha,n}^{k,2}$, где $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$-решение уравнения (9_α) с данными

$$u_{\alpha,nx_0}^{k,1}(r,0)=0,\ 0<r<1,\ u_{\alpha,n}^{k,1}(r,r)=0,$$

$$0\leq r\leq\frac{1}{2},\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,... \quad (16)$$

Учитывая формулы (13), (14), а также обратимость оператора D_{0t}^{α} [6] задачи (9_α),(15) и (9_α), (16) сводим к задаче для (9_0) с условием

$$u_{0,nx_0}^{k,1}(r,0)=0,\ 0<r<1,\ u_{0,n}^{k,1}(r,r)=0,$$

$$0\leq r\leq\frac{1}{2},\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,... \quad (17)$$

при этом $u_{0,nx_0}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r)$ в случае задачи (9_α),(15) и $u_{0,n}^{k,1}(r,0)=\dfrac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)}$ в случае задачи (9_α),(16).

В [4] показано, что задача (9_0),(17) имеет нетривиальные решения вида.

$$u_{0,n}^{k,1}(r,x_0)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r+x_0}{2}\right)^{\beta}+\left(\frac{r-x_0}{2}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{x_0}{2r}\int_{(r-x_0)/2}^{(r+x_0)/2}\xi_1^{\beta-1}P_{\lambda}^1\left(\frac{r^2-x_0^2+4\xi_1^2}{4r\xi_1}\right)d\xi_1, \quad (18)$$

где $\beta=\lambda-2s>1,\ s=1,2,...,\ P_\lambda(z)$-функция Лежандра, $\lambda=n+(m-3)/2$.

Далее, используя утверждение 1 и 2, устанавливаются, что задачи (9_α), (15) и (9_α), (16) (также (9_α), (11)) имеют ненулевые решения, при этом учитывая соотношение (10) и (18) будем иметь

$$\tau_n^k(r)=\xi^{\beta},\ \nu_n^k(r)=c_1\cdot r^{\beta-2},$$

$$c_1(1-\alpha)(3-\alpha)...(2q+1-\alpha)=$$

$$=\beta(\beta-1)+\overline{\lambda}_n,s=1,2,...\,.$$

Из оценок [7]

$$k_n\leq c_2n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2\cdot n^{\frac{m}{2}-p+1},$$

$$c_2=const,\ j=\overline{1,m-1},\ p=0,1,...$$

нетрудно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-l}r^{\beta+(1-m)/2}Y_{n,m}^k(\theta) \quad (19)$$

сходятся абсолютно и равномерно, если $l>\dfrac{3m}{2}$, $\beta>(m-1)/2$. Следовательно, функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}n^{-l}r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta) \quad (20)$$

является решением задачи (3), (2), (19) в области D^+, где функций $u_n^k(r,t)$ определяется из двумерных задач и принадлежит классу $C(\overline{D}^+)\cap C^1(D^+\cup S)\cap C^2(D^+)$.

Таким образом, мы пришли в областях D^- к первой краевой задаче для уравнения

$$\Delta_x u - u_t = 0 \tag{21}$$

с условиями

$$u\big|_s = \tau(r,\theta), u\big|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Решение задачи (21), (22) будем искать в виде (5). Подставляя (5) в (21) получим

$$u^k_{nrr} - u^k_{nt} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} u^k_n = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, n = 1,2,\ldots, \tag{23}$$

при этом краевое условие (22) имеет вид

$$u^k_n(r,0) = n^{-l} r^\beta, \; u^k_n(1,t) = 0,$$

$$k = \overline{1,k_n}, \; n = 1,2,\ldots . \tag{24}$$

Решение задачи (23), (24) будет искать в виде

$$u^k_n(r,t) = R^k_n(r) T^k_n(t). \tag{25}$$

Подставляя (25) в (23) с учетом (24) получим

$$R^k_{nrr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R^k_n + \mu R^k_n = 0, \; 0 < r < 1, \tag{26}$$

$$R^k_n(0) = 0, R^k_n(1) = 0, \tag{27}$$

$$T^k_{nt} + \mu T^k_n = 0. \tag{28}$$

Ограниченным решением задачи (26),(27) является функция [8]

$$R^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} a_s J_\nu(\mu^\nu_s r), 0 < r < 1, \tag{29}$$

$\nu = n + (m-2)/2$, $J_\nu(z)$ -функция Бесселя, μ^ν_s -ее нули, $\mu = (\mu^k_s)^2$, а решением уравнения (28) является

$$T^k_{n,s}(t) = \exp(-(\mu^\nu_s)^2 t). \tag{30}$$

Далее из (25) , (29), (30) с учетом (24) имеем

$$n^{-l} r^{\beta - \frac{1}{2}} = \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_\nu(\mu^\nu_s r), 0 < r < 1. \tag{31}$$

Разлагая функцию $r^{\beta-\frac{1}{2}}$ в ряд Фурье-Бесселя [9] найдем из (31) коэффициенты a_s

$$a_s = \frac{2n^{-l}}{\left[J_{\nu+1}(\mu^\nu_s)\right]^2} \int_0^1 \xi^{\beta+\frac{1}{2}} J_\nu(\mu^\nu_s \xi) d\xi, \tag{32}$$

при этом μ^ν_s –положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания.

Таким образом, из (25),(29),(30) следует, что решением задачи (21),(22) в области D^- является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^{\infty} a_s r^{(2-m)/2} J_\nu(\mu^\nu_s r) \exp(-$$

$$-(\mu^\nu_s)^2 t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{33}$$

и принадлежит классу

$C(\overline{D}^- / \Gamma_0) \cap C^1(D^- \cup S) \cap C^2(D^-)$, где a_s определяется из (32).

Следовательно, задача Т имеет бесчисленное множество нетривиальных решений вида (20) и (33).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М.: Наука, 2006-287с.
2. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск: НГУ, 1983-84с.
3. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.:Физматгиз, 1962-254с.
4. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений, Алматы: Гылым, 1994-170с.
5. *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения, Орал: ЗКАТУ, 2007-139с.
6. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии, М.: Высшая школа, 1985-301с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функций, т.1, М.: Наука, 1973-164с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965-703с.
9. *Бейтмен Г.,Эрдейн А.* Высшая трансцендентные функций, т.2, М.:Наука, 1974-295с.

Резюме

Айқындалған көп өлшемді гипербола-параболалық теңдеулерге біртекті Трикоми есебінің жалғыз еместігі дәлелденген.

Summary

The paper demonstrates that homogeneous Tricomi's problem for degenerate multidimentional hyperbolic-parabolic equation has innumerable variety of nontrivial solutions.