УДК 517.946.4

М.О. ОРЫНБАСАРОВ

# НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА САМАРСКОГО ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье методом специальных бипапароболических потенциалов доказана регулярная разрешимость одной смешенной нелокальной краевой задачи типа Самарского сведением к интегральному уравнению типа Вольтерра-Фредгольма 1-го рода, которое при помощи параболических операторов дробного порядка сведено к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода и показано разрешимость его.

**1. Постановка задачи.** Требуется найти регулярное решение $u(x,y,t)$ бипараболического уравнения

$$\delta^2 u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)^2 u = F(x,y,t) \tag{1}$$

в полуплоскости

$R_t^2 \equiv \{(x,y): 0 < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ и при $t > 0$ удовлетворяющее начальным условием

$$\delta^k u\big|_{t=0} = f_k(x,y), \quad k = 0,1 \tag{2}$$

краевому условию

$$u_{xx}(0,y,t) = \varphi_1(y,t) \tag{3}$$

и нелокальному интегральному условию

$$\int_0^l u(x,y,t)dx = \varphi_0(y,t) \tag{4}$$

где $\Delta$ - оператор Лапласа, $l = const > 0$.

Заданные функции

$$F(x,y,t) \in C^{\alpha,\alpha,0}_{x,y,t}(R^2_{+t}), \quad (0 < \alpha \le 1),$$

$$f_0(x,y) \in C^{2,0}_{x,y}(R^2_t),$$

$$f_1(x,y) \in C(R^2_t), \qquad \varphi_0(y,t) \in C^{3+\alpha,1+\frac{1+\alpha}{2}}_{y,t}(R_t),$$

$$\varphi_1(y,t) \in C^{\alpha,0}_{y,t}(R_t) \tag{5}$$

– ограничены. Кроме того выполнены следующие условия согласования

$$D^2_x f_0(0,y) = \varphi_1(y,0), \ \int_0^l f_0(x,y)dx = \varphi_0(y,0) \tag{6}$$

Известно, что однородное $\delta^2 u = 0$ имеет линейно-независимые решения

$$G_k(x,y,t) = t^k G(x,y,t), \qquad k = 0,1$$

где $G(x,y,t)$ - фундаментальное решение (Ф.Р.) уравнения теплопроводности.

Решение задачи Коши для неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (2) выражается формулой

$$\begin{aligned} u_0(x,y,t) &= \\ &= \int_0^t d\tau \iint_{R^2} F(\xi,\eta,\tau)(t-\tau)G(x-\xi,y-\eta,t-\tau)d\xi d\eta + \\ &+ \iint_{R^2} f_0(\xi,\eta)G(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta + \\ &+ \iint_{R^2} f_1(\xi,\eta)t\,G(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta \end{aligned} \tag{7}$$

Используя функцию $u_0(x,y,t)$, краевую задачу (1) – (4) можно привести к однородному уравнению с нулевыми начальными условиями. Поэтому, для удобства в дальнейшем будем предполагать, что функции

$$F(x,y,t) = 0, \qquad f_i(x,y) = 0.$$

**1. Специальные потенциалы и их свойства.** Построим новое ядро

$$Q(x,t) = \int_0^t G(x,t-z)dz \tag{8}$$

Легко проверить, что функция $Q(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta_1 Q \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)Q = 0.$$

При помощи функции $G_1(x,y,t) \equiv tG(x,y,t)$ и $G_2(x,y,t) \equiv G(x,t)G(y,t)$ построим следующие поверхностные потенциалы

$$W_i(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_i(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_i(x-\xi,y-\eta,t-$$

$$-\tau)\Big|_{\xi=0}d\eta,\qquad i=1,2.$$

Относительно потенциалов $W_i(x,y,t)$ справедлива:

***Лемма 1.*** Если функция $\sigma_i(y,t)\in C(R_t)$ ограничены, то при $x>0$

$$W_i(x,y,t)\in C^{\infty}_{x,y,t}(R^2_{+t})\ \text{и}\ \delta^2W_i=0 \qquad (9)$$

Кроме того

$$\lim_{x\to0}\frac{\partial^2W_i}{\partial x^2}=\mp\frac{1}{2a^4}\sigma_i(y,t) \qquad (10)$$

***Доказательство.*** Известно, что при $t>0$ ф.р. $G(x,y,t)\in C^{\infty}_{x,y,t}$ и $\delta G=0$. Легко проверить, что

$$\delta^2G_1=\delta^2(tG)=\delta G=0\ \text{и}$$

$$\delta^2(Q(x,t)G(y,t))=0.$$

Поэтому нетрудно убедиться, что при $x>0$ $W_i(x,y,t)\in C^{\infty}_{x,y,t}(R^2_{+t})$ и $\delta^2W_i=0$.

Покажем предельное соотношение (10). Дифференцируя $W_i(x,y,t)$ под знаком интеграла имеем

$$\frac{\partial^2W_1}{\partial x^2}=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\eta,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G_1(x-\xi,\right.$$

$$\left.y-\eta,t-\tau)\right]_{\xi=0}d\eta=$$

$$=\frac{1}{(2a^2)^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_1(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\left[-3x+\right.$$

$$\left.+\frac{x^3}{2a^2(t-\tau)}\right]e^{-\frac{x^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta$$

Производя следующие замены переменных

$$\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}=v,\qquad \frac{\eta-y}{2a\sqrt{t-\tau}}=z \qquad (11)$$

найдем

$$\frac{\partial^2W_1}{\partial x^2}=\frac{1}{2a^4}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\left[-3+2v^2\right]e^{-v^2}dv\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1\left(y+\right.$$

$$\left.+\frac{x}{v}z,t-\frac{x^2}{4a^2v^2}\right)e^{-z^2}dz$$

Отсюда, переходя к пределу $x\to0$, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\partial^2W_1}{\partial x^2}=\frac{\sigma_1(y,t)}{2a^4\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}(-3+2v^2)e^{-v^2}dv=$$

$$=-\frac{1}{2a^4}\sigma_1(y,t) \qquad (12)$$

Теперь вычислим предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\partial^2W_2}{\partial x^2}$. Дифференцируя $W_2(x,y,t)$ по $x$ имеем

$$\frac{\partial^2W_2}{\partial x^2}=-\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_2(\eta,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x^2}[Q(x,t-$$

$$-\tau)G(y-\eta,t-\tau)]d\eta.$$

Так как

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q(x,t)=\int_0^t\frac{\partial^2G(x,t-z)}{\partial x^2}dz=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^t\frac{\partial G}{\partial t}dz=\frac{1}{a^2}\int_0^t\frac{\partial G}{\partial z}dz=\frac{1}{a^2}G(x,t),$$

то

$$\frac{\partial W_2}{\partial x}=-\frac{1}{a^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_2(\eta,\tau)G(x,y-\eta,t-\tau)d\eta.$$

Далее еще раз дифференцируя по $x$ найдем

$$\frac{\partial^2W}{\partial x^2}=\frac{1}{2a^4}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_2(\eta,\tau)x}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{x^2+(y-\eta)^2}{4a^2\pi(t-\tau)}}d\eta.$$

Теперь, производя замены (11) и переходя к пределу, легко получить

$$\lim_{x\to0}\frac{\partial^2W_1}{\partial x^2}=\frac{1}{2a^4}\sigma_2(y,t) \qquad (13)$$

Лемма 1 доказана.

**3. Сведение краевой задачи (1) – (4) к интегральному уравнению.**

Решение краевой задачи (1) –(4) будем искать в виде

$$u(x,y,t)=-2a^4\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\eta,\tau)(t-\tau)\frac{\partial G}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}d\eta+$$

$$+2a^4\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_2(\eta,\tau)\frac{\partial Q}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}G(y-\eta,t-\tau)d\eta \quad (14)$$

где $\sigma_i(y,t)$ - непрерывные неизвестные функции. В силу леммы 1 функция $u(x,y,t)$, определяемые равенством (14) удовлетворяет однородному уравнению $\delta^2 u=0$ и нулевым начальным условием (2) ( $f_i(x,y)=0$ ). Неизвестные функции $\sigma_i(y,t)$ определим так, чтобы функция $u(x,y,t)$ удовлетворяла краевым условием (3) – (4).

Из краевого условия (3) найдем

$$\sigma_1(y,t)+\sigma_2(y,t)=\varphi_1(y,t) \quad (15)$$

Используя интегральное краевое условие (4) имеем

$$-\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\eta,\tau)(t-\tau)\left[\int_0^l\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}dx\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_2(\eta,\tau)(t-\tau)\left[\int_0^l\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}dx\right]G(y-$$

$$-\eta,t-\tau)d\eta=\varphi_0(y,t) \quad (16)$$

Из равенств (15) и (16) исключив неизвестную функцию $\sigma_2(y,t)$, относительно $\sigma_1(y,t)$ получим следующее интегральное уравнения Вольтера – Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\eta,\tau)\left\{(t-\tau)\left[\int_0^l\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}dx\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^l\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}dx\right]G(y-\eta,t-\tau)\right\}d\eta=\Phi(y,t) \quad (17)$$

где

$$\Phi(y,t)=-\frac{1}{2a^4}\varphi_0(y,t)+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\eta,\tau)\left[\int_0^l\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}dx\right]G(y-\eta,t-\tau)d\eta \quad (18)$$

**4. Сведение интегрального уравнения 1-го рода (17) к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода.**

Так как

$$\int_0^l\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}dx=-\int_0^l\frac{\partial G}{\partial x}dx=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[1-e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]G(y-\eta,t-\tau)$$

$$\int_0^l\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}dx=-\int_0^l\frac{\partial Q}{\partial x}dx=$$

$$=\int_0^{t-\tau}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau-z)}}\left[1-e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau-z)}}\right]dz.$$

то, выделяя главную часть ядра и вводя операторную запись, можно переписать в виде

$$3K_0\sigma_1=\Phi(y,t)+K_1\sigma_1 \quad (19)$$

где $K_i$ - интегральные операторы соответственно с ядрами

$$K_0(y-\eta,t-\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[(t-\tau)G(y-\eta,t-\tau)\right],$$

$$K_1(y-\eta,t-\tau)=\left[(t-\tau)G(l,t-\tau)+\right.$$

$$\left.+\int_0^{t-z}G(l,t-\tau-z)dz\right]G(y-\eta,t-\tau). \quad (20)$$

Очевидно, что $l\neq 0$ ядро $K_1(y-\eta,t-\tau)$ бесконечно дифференцируемо и удовлетворяет оценке

$$\left|D_t^r D_y^s K_1\right|\le Me^{-\delta\frac{l^2+(y-\eta)^2}{t-\tau}} \quad (21)$$

Относительно интегрального оператора $K_0$ докажем следующее утверждение.

***Лемма 2.*** Если функция $\sigma(y,t)\in C(R_t)$ ограничена, то

$$J^{\frac{1}{2}}[K_0\sigma]=\frac{1}{4a}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(\eta,\tau)(t-\tau)G(y-\eta,t-\tau)d\eta \quad (22)$$

где $J^{\frac{1}{2}}$ - параболический оператор интегрирова-

ния дробного порядка [3].

***Доказательство.*** Применяя оператор дробного порядка $J^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$J^{\frac{1}{2}}K_0\sigma = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(y-\eta,t-\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ \int_0^\tau d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\eta_1,\tau_1)}{2a\sqrt{\pi(\tau-\tau_1)}} (\tau - \right.$$

$$\left. -\tau_1) G(\eta-\eta_1,\tau-\tau_1) d\eta_1 \right\} d\eta =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\eta_1,\tau_1) \left\{ \int_{\tau_1}^t \frac{(\tau-\tau_1)}{\pi\sqrt{(t-\tau)(\tau-\tau_1)}} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(y - \right.$$

$$\left. -\eta,t-\tau) G(\eta-\eta_1,\tau-\tau_1) d\eta \right\} d\eta_1$$

Известно, что при $\tau_1 < \tau < t$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(y-\eta,t-\tau) G(\eta-\eta_1,\tau-\tau_1) d\eta =$$

$$= G(y-\eta_1,t-\tau_1).$$

Поэтому

$$J^{\frac{1}{2}}K_0\sigma = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\eta_1,$$

$$\tau_1) \left\{ \int_{\tau_1}^t \frac{(\tau-\tau_1)}{\pi\sqrt{(t-\tau)(\tau-\tau_1)}} d\tau \right\} G(y-\eta_1,t-\tau_1) d\eta_1 \quad (23)$$

Вычислим интеграл

$$I = \int_{\tau_1}^t \frac{(\tau-\tau_1)}{\pi\sqrt{(t-\tau)(\tau-\tau_1)}} d\tau = \begin{vmatrix} \tau = t-(t-\tau_1)z \\ d\tau = -(t-\tau_1)dz \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{t-\tau_1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z}} dz =$$

$$= \frac{t-\tau}{\pi} \int_0^1 \left[ \left(\sqrt{z(1-z)}\right)' + \frac{1}{2\sqrt{z(1-z)}} \right] dz = \frac{1}{2}(t-\tau_1).$$

Подставляя значение интеграла $I$ в равенство (23), окончательно имеем (22).

На основании доказанного равенства (22) уравнение (19) перепишем в виде

$$\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\eta,\tau)(t-\tau) G(y-\eta,t-\tau) d\eta =$$

$$= \frac{4a}{3} J^{\frac{1}{2}}\Phi + \frac{4a}{3} J^{\frac{1}{2}} K_1\sigma_1 \quad (24)$$

Теперь, применяя бипараболический оператор $\delta_1^2 \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$ к равенству (24) и учитывая известное равенство [3]

$$\delta_1^2 V = \left( \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\eta,\tau)(t -$$

$$-\tau) G(y-\eta,t-\tau) d\eta = \sigma_1(y,t)$$

Относительно неизвестной функции $\sigma_1(y,t)$ получим следующее интегральное уравнение 2-го рода

$$\sigma_1(y,t) = \frac{4a}{3} \delta_1^2 J^{\frac{1}{2}}\Phi + \frac{4a}{3} \delta_1^2 J^{\frac{1}{2}} K_1\sigma_1 \quad (25)$$

**5. Исследование свободного члена уравнения (25).**

Сперва докажем следующее утверждение

***Лемма 3.*** Если функция $\Phi(y,t) \in C_{y,t}^{1+\alpha,0}(R_t)$ $(0 < \alpha \le 1)$ и ограничена, то

$$\lim_{h\to 0} I_h = \lim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\eta,t-h) - \Phi(y,t-h)}{\sqrt{\pi h}} G(y -$$

$$-\eta,h) d\eta = 0.$$

***Доказательство.*** По формуле Тейлера имеем

$$\Phi(\eta,t-h) - \Phi(y,t-h) =$$

$$= \varphi'(\eta + \theta(y-\eta),t-h)(y-\eta).$$

Поэтому

$$I_h = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_\eta(\eta + \theta(y-\eta),$$

$$t-h)(y-\eta) G(y-\eta,h) d\eta.$$

Сделаем замену переменных $\eta - y = 2a\sqrt{h}\,z$, тогда

$$I_h = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_\eta(y + (1-\theta)2a\sqrt{h}z, t-h) z e^{-z^2} dz.$$

Отсюда

$$\lim_{h\to 0} I_h = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \varphi'_\eta(y,t) \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2} dz = 0.$$

***Теорема 1.*** Если функция

$\Phi(y,t)\in C_{y,t}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R_t)$ и $\Phi(y,0)=0$, то функция $\Phi_0(y,t)\equiv\delta_1 J^{\frac{1}{2}}\Phi\in C(R_t)$ ограничена и представима в виде

$$\Phi_0(y,t)=\frac{\Phi(y,t)-\Phi(y,0)}{\sqrt{\pi t}}-\int_0^t\frac{\Phi(y,\tau)-\Phi(y,t)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}d\tau+$$

$$+\int_0^t\frac{d\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\varphi'_y(\eta+\theta(y-\eta),\tau)-$$

$$-\Phi'_y(y,\tau)\Big](y-\eta)G(y-\eta,t-\tau)d\eta \qquad (26)$$

***Доказательство.*** Применяя оператор $\delta_1$ интегралу $J_h^{\frac{1}{2}}\Phi$ и после некоторых преобразований имеем

$$\delta_1 J_n^{\frac{1}{2}}\Phi=\int_0^{t-h}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta,\tau)G(y-\eta,t-\tau)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi h}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta,t-h)G(y-\eta,h)d\eta=$$

$$=\frac{\Phi(y,t)-\Phi(y,0)}{\sqrt{\pi t}}+\frac{\Phi(y,t-h)-\Phi(y,t)}{\sqrt{\pi h}}+$$

$$+\int_0^{t-h}\frac{d\tau}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\eta,\tau)-\Phi(y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}G(y-\eta,t-\tau)d\eta-$$

$$-\int_0^{t-h}\frac{\Phi(\eta,\tau)-\Phi(y,t)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\eta,t-h)-\Phi(y,t-h)}{\sqrt{\pi h}}G(y-\eta,h)d\eta$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая лемму 3, получим представление (26).

***Теорема 2.*** Если функция $\Phi(y,t)\in C_{y,t}^{3+\alpha,1+\frac{1+\alpha}{2}}$ ограничена и $\Phi(y,0)=0$, то $\Phi_1(y,t)\equiv\delta_1^2 J^{\frac{1}{2}}\Phi\in C(R_t)$ ограничена.

***Доказательство.*** Интегральный оператор $J^{\frac{1}{2}}\Phi$ представим в виде

$$J^{\frac{1}{2}}\Phi=\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta,\tau)G(y-\eta,t-\tau)d\eta=$$

$$=\left|\begin{matrix}\eta-y=\eta_1\\ t-\tau=z\end{matrix}\right|=\int_0^t\frac{dz}{\sqrt{\pi z}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta_1+y,t-z)G(\eta_1,z)d\eta_1$$

Отсюда применяя оператор $\delta_1$, получим

$$\delta_1 J^{\frac{1}{2}}\Phi=\int_0^t\frac{dz}{\sqrt{\pi z}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_1\Phi(\eta_1+y,t-z)G(\eta_1,z)d\eta_1.$$

Теперь сделаем обратные замены $\eta_1=\eta-y,\ z=t-\tau$. Тогда

$$\delta_1 J^{\frac{1}{2}}\Phi=\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_1\Phi(\eta,\tau)G(y-\eta,t-\tau)d\eta.$$

Так как функция $\delta_1\Phi(y,t)\in C_{y,t}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}$, то в силу теоремы 1 $\Phi_1(y,t)\equiv\delta_1(\delta_1 J^{\frac{1}{2}}\Phi)\in C(R_t)$ и ограничена.

Функция $\Phi(y,t)$ определяется равенством (18). Функцию $\Phi(y,t)$ можно представить в виде

$$\Phi(y,t)=-\frac{1}{4a^2}\varphi_0(y,t)+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\eta,\tau)\left[\int_0^{t-\tau}\frac{\partial Q}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}dx\right]G(y-\eta,t-\tau)d\eta=$$

$$=-\frac{1}{4a^2}\varphi_0(y,t)+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\eta,\tau)\left[\int_0^{t-\tau}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau-z)}}\right.$$

$$\left.\left(1-e^{-\frac{l^2}{4a^2(t-\tau-z)}}\right)dz\right]G(y-\eta,t-\tau)d\eta=$$

$$=-\frac{1}{4a^2}\varphi_0(y,t)+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_1(\eta,\tau)\sqrt{t-\tau}}{a\sqrt{\pi}}G(y-\eta,t-\tau)d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\eta,\tau)\left[\int_0^{t-\tau} G(l,t-\tau-z)dz\right] G d\eta =$$

$$= -\frac{1}{4a^2}\varphi_0(y,t) + H_1\varphi_1 + H_2\varphi_1 \qquad (27)$$

В представлении (27) ядро интегрального оператора $H_2\varphi_1$ бесконечно дифференцируемая функция, поэтому функция $H_2\varphi_1 \in C^{\infty}_{y,t}$. Относительно слогаемого $H_1\varphi_1$ справедливо утверждение

***Лемма 4.*** Если функция $\varphi_1(y,t) \in C^{\alpha,0}_{y,t}(R_t)$, то функция $H_1\varphi_1(y,t) \in C^{3+\alpha,1+\frac{1+\alpha}{2}}_{y,t}(R_t)$

$$\delta_1^2 J^{\frac{1}{2}}(H_1\varphi_1) = a\varphi_1(y,t) \qquad (28)$$

Лемма 4 доказывается используя равенства (22).

**6. Решение интегрального уравнения Вольтерра-Фредгольма 2-го рода (25).**

Для чего интегральные уравнение (25) перепишем в виде

$$\sigma_1(y,t) - K\sigma_1 = \Phi_1(y,t) \qquad (29)$$

Так как ядро $K_1(y-\eta,t-\tau)$, определяемое равенством (20) бесконечно дифференцируемая функция и для производных $K_1(y-\eta,t-\tau)$ справедлива оценка (21), то интегральный оператор $K\sigma_1 = \frac{4a}{3}\delta_1^2 J^{\frac{1}{2}} K_1\sigma_1$ также линейный интегральный оператор Вольтерра-Фредгольма с непрерывным ограниченным ядром. Как показано в п.5 свободный член $\Phi_1(y,t) = \frac{4a}{3}\delta_1^2 J^{\frac{1}{2}}\Phi$ непрерывная и ограниченная функция. Поэтому, интегральное уравнение (29) можно решать методам последовательных приближений и решение $\sigma_1(y,t) \in C(R_t)$ ограничено. Неизвестная функция $\sigma_2(y,t)$ определяется из равенства (15).

Подытоживая полученные результаты можно сформулировать

***Теорема 3.*** Если заданные функции $F(x,y,t)$, $f_i(x,y)$, $\varphi_i(x,y)$ удовлетворяет условием (5) – (6), то краевая задача (1) – (4) имеет регулярное решение, определяемое равенством (14), где неизвестная функция $\sigma_1(y,t)$ находится из интегрального уравнения (29), а неизвестная функция $\sigma_2(y,t)$ из равенства (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., Высшая школа 1995 г., 301 стр.

2. *Орынбасаров М.О.* Теория тепловых потенциалов и ее применение. Алматы, изд. «?аза? Университетö» 2005 г., 70 стр.

3. *Орынбасаров М.О.* Применение параболических операторов дробного порядка для решения задачи Коши одной системы интегро-дифференциальных уравнений с полипараболическим оператором. Сборник по вопросам математики и механики вып. VIII., 1976 г., 37-41 стр.

**Резюме**

Арнайы бипараболалық потенциалдар көмегімен Вольтерра-Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуіне келтіру жолымен аралас локальды емес Самарский типті шекаралық есептің регулярлық шешімі бар екенін дәлелденген. Алынған 1-текті интегралдық теңдеудің шешімінің бар екені бөлшек ретті бипараболалық оператордың әдісімен көрсетілген.

**Summary**

In the article proves the regular resolvability of one mixed not local regional task of Samara equation to integral equalization of Volterra-Fretgolm of 1st sort which through the parabolic operators of a fractional order taking to equivalence integral equation of 2nd sort with the method of special biparabolic potentials and shown its resolvability.