УДК 517.946.4

О.М.ОРЫНБАСАРОВ

# РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 3-ГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА В ПОЛУПОЛОСЕ

Доказано существование регулярного решения одной краевой задачи для уравнения составного типа 3- го порядка методом нагруженного уравнения теплопроводности с использованием функции Грина и теории тепловых потенциалов.

**1. Постановка задачи.** Требуется найти регулярное решение $u(x,y,t,)$ уравнения составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u\right)=F(x,y,t) \qquad (1)$$

в области,

$\Omega_t = LXR_t^+ = \{(x,y,t): 0<x<l, 0<y<\infty; t>0\}$

удовлетворяющие начальному условию

$$u(x,y,0)=f(x,y) \qquad (2)$$

и краевыми условиями

$$u(0,y,t)=\varphi_0(y,t) \qquad (3)$$

$$u(l,y,t)=\varphi_1(y,t) \qquad (4)$$

$$u_x(l,y,t)=\varphi_2(y,t) \qquad (5)$$

$$u(x,0,t)=\varphi(x,t) \qquad (6)$$

где заданные функции

$$F(x,y,t)\in C^{0,\alpha,0}_{x,y,t}(\Omega_t),\quad f(x,y)\in C^{1,0}_{x,y}(\Omega_0) \qquad (7)$$

$$\varphi_0(y,t)\in C(R_t^+),\ \varphi_1(y,t)\in C^{0,1}_{y,t}(R_t^1),$$

$$\varphi_2(y,t)\in C^{2,1}_{y,t}(R_t^1),\ \psi(x,t)\in C^{2,0}_{x,t}(R_t)$$

и ограничены.

Корме того выполняются следующие условия согласования:

$$f(0,y)=\varphi_0(y,0),\ f(l,y)=\varphi_1(y,0),$$

$$f'_x(l,y)=\varphi_2(y,0),\ f(x,0)=\psi(x,0)$$

$$\varphi_0(0,t)=\psi(0,t),\ \varphi_1(0,t)=\psi(l,t),$$

$$\varphi_2(0,t)=\psi'_x(l,t) \qquad (8)$$

Поставленную краевую задачу (1)-(6) будем решать методом нагруженных уравнений. Для того уравнения (1) будем интегрировать по $x$ от $l$ до $x$. Тогда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u\right)_{x=l}+\int_l^x F(\xi,y,t)d\xi \qquad (9)$$

Далее, учитывая краевые условия (4) относительно $u(x,y,t)$ получим следующие нагруженное уравнение теплопроводности

$$u_t-a^2\Delta u=-a^2u_{xx}(l,y,t)+F_1(x,y,t) \qquad (10)$$

где

$$F_1(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi'(y,t)-$$

$$-a^2\frac{\partial^2}{\partial t}\varphi(y,t)+\int_l^x F(\xi,y,t)d\xi \qquad (11)$$

Нагруженное уравнение (10) будем решать $l$ области $\Omega_t$ с начальными условием (2) и краевыми условиями (3)-(5)-(6).

**2. Сведение краевой задачи (10)-(2)-(3)-(5)-(6) к интегро-дифференциальному уравнению.**

Легко проверить, что функция Грина смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности с условиями (3)-(5)-(6) в полуполосе является функция

$$Q(x\pm\xi,y\pm\eta,t)=$$

$$=Q_1(x\pm\xi+2nl,t)Q_2(y\pm\eta,t) \qquad (12)$$

где

$$Q_1(x\pm\xi+2nl,t)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[G(x-\xi+2nl,t)-$$

$$-G(x+\xi+2nl,t)] \qquad (13)$$

$$Q_2(y\pm\eta,t)=G(y-\eta,t)-G(y+\eta,t) \qquad (14)$$

$G(x,y,t)=G(x,t)G(y,t)$ -фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Считая первую часть уравнения (10) известной функцией решение краевой задачи (10)-(2)-(3)-(5)-(6) при помощи функции Грина можно представить в виде

$$u(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_0^\infty f(\xi,\eta)Q(x\pm\xi,\,y\pm\eta,t)d\eta+$$
$$+a^2\int_0^t d\tau\int_0^\infty\varphi_0(\eta,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}Q(x\pm\xi,\,y-\eta,t-\tau)\Big|_{\xi=0}d\eta+$$
$$+a^2\int_0^t d\tau\int_0^\infty\varphi_2(\eta,\tau)Q(x\pm l,\,y-\eta,t-\tau)d\eta+$$
$$+a^2\int_0^l d\tau\int_0^t\psi(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\eta}Q(x\pm\xi,\,y-\eta,t-\tau)\Big|_{\eta=0}d\xi+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_0^l\int_0^\infty[F_1(\xi,\eta,\tau)-$$
$$-a^2u_{xx}(l,\eta,\tau)]\cdot Q(x\pm l,\,y-\eta,t-\tau)d\xi d\eta \qquad (15)$$

Отсюда относительно нагруженного слагаемого $u_{xx}(l,y,t)$ получим интегральное уравнение

$$u(x,y,t)=-a^2\int_0^t d\tau\int_0^\infty u_{xx}(l,\eta,\tau)\cdot K(x,t-$$
$$-\tau)Q_2(y\pm\eta,t-\tau)d\eta+\Phi(x,y,t) \qquad (16)$$

где ядро

$$K(x,t-\tau)=\int_0^l Q_1(x\pm\xi,t-\tau)d\xi \qquad (17)$$

$$\Phi(x,y,t)=V_0[f]+a^2W[\varphi_0]+$$
$$+a^2\omega[\varphi_2]+a^2W[\psi]+V[F_1] \qquad (18)$$

Полученные интегро-дифференциальные уравнения (16) будем решать методом сведения к интегральному уравнению относительно $u_{xx}(l,y,t)$. Но непосредственные дифференцировать по $x$ два раза равенства (16) нельзя, так как ядро $\dfrac{\partial^2K(x,t-\tau)}{\partial x^2}$ имеет существенную (не интегральному) особенность при $x=l$. Поэтому сперва выделяем главную часть ядра $K(x,t-\tau)$.

**3. Выделение главной части ядра** $K(x,t-\tau)$

Для этого функции Грина $Q_1(x\pm\xi,t-\tau)$ представим в виде

$$Q_1(x\pm\xi,t-\tau)=Q_0(x\pm\xi,t-\tau)+$$
$$+[Q_1(x\pm\xi,t-\tau)-Q_0(x\pm\xi,t-\tau)]=$$
$$=Q_0(x\pm\xi,t-\tau)+\widetilde{Q}_1(x\pm\xi,t-\tau) \qquad (19)$$

где

$$Q_0(x\pm\xi,t-\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty}[G(x-\xi+2nl,t-\tau)+$$
$$+G(x+\xi+2nl,t-\tau)] \qquad (20)$$

$$\widetilde{Q}_1(x\pm\xi,t-\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[G(x-\xi+$$
$$+2nl,t-\tau)-G(x+\xi+2nl,t-\tau)]-$$
$$-\sum_{-\infty}^{\infty}[G(x-\xi+2nl,t-\tau)+G(x+\xi+2nl,t-\tau)]=$$
$$=\sum_{-\infty}^{\infty}[(-1)^n-1]G(x-\xi+2nl,t-\tau)+$$
$$+\sum_{-\infty}^{\infty}[(-1)^{n+1}-1]G(x+\xi+2nl,t-\tau)=$$
$$=-2\sum_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi+(2k+1)2l,t-\tau)-$$
$$-2\sum_{-\infty}^{\infty}G(x+\xi+2(2k)l,t-\tau) \qquad (21)$$

Таким образом, ядро $K(x,t-\tau)$ можно представить в виде $K(x,t-\tau)=K_0+K_1$, где

$$K_0(x,t-\tau)=\int_0^l Q_0(x\pm\xi,t-\tau),$$

$$K_1(x,t-\tau)=\int_0^l\widetilde{Q}_1(x\pm\xi,t-\tau)d\xi.$$

Относительно $K_0(x,t-\tau)$ и $K_1(x,t-\tau)$ справедливо следующие утверждения:

**Лемма 1.** При $t>\tau$ имеет место равенство

$$K_0(x,t-\tau)=\int_0^l Q_0(x\pm\xi,t-\tau)d\xi=1 \qquad (22)$$

**Доказательство:** С этой целью $K_0$ представим в виде

$$K_0(x,t-\tau)=\int_0^l\sum_{-\infty}^{\infty}[G(x-\xi+2nl,t-\tau)+$$

$$+G(x+\xi+2nl,t-\tau)]d\xi=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\{\int_0^l G(x-\xi+2nl,t-\tau)d\xi+$$

$$+\int_0^l G(x+\xi+2nl,t-\tau)d\xi\}$$

Сделаем замену $\xi-2nl=z$ в первом интеграле, $-\xi-2nl=z$ во втором интеграле. Тогда расписывая суммы получим

$$K_0(x,t-\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-2nl}^{l-2nl}G(x-z,t-\tau)dz-$$

$$-\int_{-2nl}^{-l-2nl}G(x-z,t-\tau)dz\}=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-l(2n+1)}^{l-2nl}G(x-z,t-\tau)dz=\ldots+$$

$$+\int_{-3l}^{-l}G(x-z,t-\tau)dz\int_{-l}^{l}G(x-z,t-\tau)dz\}+$$

$$+\int_{l}^{3l}G(x-z,t-\tau)dz+\ldots=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-z,t-\tau)dz=1$$

Лемма 1 доказано.

**Лемма 2.** При $t>\tau$ и $x>0$ ядро $K_1(x,t-\tau)\in C^{\infty}_{x,t}$ и производные $D^r_xD^r_xK_1(x,t-\tau)$ ограничено, при $x=l$, т.е.

$$\left|D^r_xD^r_xK_1\right|\le M \qquad (23)$$

**Доказательство:** Дифференцируя под знаком интеграла получим

$$\frac{\partial K_1}{\partial x}=-2\int_0^l\frac{\partial\widetilde{Q}_1}{\partial x}d\xi=-2\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}[G(x-\xi+2(2n+$$

$$+1)l,t-\tau)+G(x+\xi+2(2n)l,t-\tau)]d\xi=$$

$$=2\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^l\frac{\partial}{\partial\xi}G(x-\xi+2(2n+1)l,t-\tau)d\xi-$$

$$-2\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^l\frac{\partial}{\partial\xi}G(x+\xi+2(2n)l,t-\tau)d\xi=$$

$$=2[G(x-\xi+2(2n+1)l,t-\tau)\Big|_0^l]-$$

$$-2[G(x+\xi+2(2n)l,t-\tau)\Big|_0^l]=$$

$$=2[G(x-l+2(2n+1)l,t-\tau)-$$

$$-G(x+2(2n+1)l,t-\tau)]-$$

$$-2[G(x+l+2(2n)l,t-\tau)-G(x+2(2n)l,$$

$$t-\tau)]=2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^nG(x+2nl,t-\tau)$$

Отсюда видно, что при $0<x\le l$ функция $\frac{\partial K_1}{\partial x}\in C^{\infty}_{x,t}$ и второе производное

$$\frac{\partial^2K_1}{\partial x^2}=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}[\frac{x+2nl}{2a^2(t-\tau)}G(x+2nl,t-\tau)]$$

Полагая, $x=l$ имеем

$$\left.\frac{\partial^2K_1}{\partial x^2}\right|_{x=l}=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)l}{2a^2(t-\tau)}G((2n+1)l,t-\tau)] \qquad (24)$$

Общий член ряда (24) представим в виде

$$\frac{(2n+1)l}{2a^2\sqrt{(t-\tau)}}G((2n+1)l,t-\tau)=$$

$$=\frac{(2n+1)l}{4\sqrt{\pi}a^3(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{((2n+1)l)^2}{4a^2(t-\tau)}}=$$

$$=\frac{2[(2n+1)l]^3}{8\sqrt{\pi}(2a\sqrt{t-\tau})^3}e^{-\frac{[(2n+1)l]^2}{8a^2(t-\tau)}}\frac{e^{-\frac{[(2n+1)l]^2}{8a^2(t-\tau)}}}{[(2n+1)l]^2}$$

Используя, известное неравенство

$$0<(\frac{(2n+1)l}{2a\sqrt{t-\tau}})^3e^{-\frac{1}{2}(\frac{(2n+1)l}{2a\sqrt{t-\tau}})^2}\le N_0$$

Получим оценку для общего члена ряда (24)

$$\left|\frac{(2n+1)l}{2a^2(t-\tau)}G((2n+1)l,t-\tau)\right|\le$$

$$\le\frac{2N_0}{\sqrt{\pi}[(2n+1)l]^2}e^{-\frac{1}{2}(\frac{(2n+1)l}{2a\sqrt{t-\tau}})^2}$$

Поэтому знака чередующий ряд (24) сходится абсолютно и равномерно, т.е.

$$\left|\frac{\partial^2 K_1(x,t-\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=l} \le M \qquad (26)$$

**4. Исследование свободного члена** $\Phi(x,y,t)$

Функция $\Phi(x,y,t)$, определяемые равенством (18), состоит из суммы объемных тепловых потенциалов $V_0[F], V[F_1]$ поверхностных тепловых потенциалов двойного слоя $W[\varphi_0], W[\psi]$ и потенциала простого слоя $\omega[\varphi_2]$.

Для нахождения нагруженного слагаемого $u_{xx}(l,y,t)$ из интегрального уравнения (16) достаточно существование ограниченного и непрерывного производного $\Phi''_{xx}(l,y,t)$.

Приняв во внимание свойства тепловых потенциалов [1] можно сформировать следующие утверждения:

1) Если функция $f(x)\subset C(\Omega_0)$ ограничена, то при $t>0$ функция $V_0(x,y,t)\in C^{\infty}_{x,y,t}$ и ограничена.

2) Если функция $F_1(x,t)\in C^{\alpha,0}_{x,t}$ ограничена, то функция $V(x,y,t)\in C^{2,2,1}_{x,y,t}$ и ограничена.

3) Если функция $\varphi_0(y,t)\in C(R^+_t)$ ограничена, то при $x>0$ функция $W[\varphi_0]\in C^{\infty}_{x,y,t}$ и ограничена.

Относительно потенциалов простого слоя $\omega[\varphi_2]$ двойного слоя $W[\varphi_2]$ докажем следующие леммы:

**Лемма 3.** Если функция $\varphi_2(y,t)\in C^{2,1}_{y,t}$ и ограничена и $\varphi_2(y,0)=0$, то функция $\omega[\varphi_2]\in C^2_t$ и представлена в виде

$$D^2_t\omega[\varphi_2]=\frac{1}{a^2}\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}(D_\tau-a^2D^2_\eta)\varphi_2 Q(x\pm l,$$
$$y\pm\eta,t-\tau)d\eta+$$
$$+\int_0^t\varphi_2(0,\tau)\left.\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}Q_1(x\pm l,t-\tau)d\tau \qquad (27)$$

**Доказательство.** При $x\ne l$, ядро $Q_1(x\pm l,t-\tau)\in C^{\infty}_{x,t}$ так, что интегрируя $\omega[\varphi_2]$ можно дифференцировать под знаком интеграла. Поэтому, дифференцируя по $x$ найдем

$$D^2_t\omega[\varphi_2]=\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\varphi_2(\eta,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q(x\pm l,$$
$$y\pm\eta,t-\tau)d\eta=\left|\frac{\partial Q}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)\right|=$$
$$=\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\varphi_2(\eta,\tau)(0,\tau)\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{a^2}\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\varphi_2(\eta,\tau)\left[\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right]d\eta$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая условия $\varphi_2(y,0)=0$ и $Q_2(y\pm\eta,t-\tau)|_{\eta=0}=0$, получим

$$D^2_t\omega[\varphi_2]=-\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}d\eta\left[\varphi_2(\eta,\tau)Q'_\eta\Big|_0^{\infty}-\int_0^t\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}Q\eta d\tau\right]-$$
$$-\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}d\tau\left[\varphi_2(\eta,\tau)\frac{\partial Q}{\partial\eta}\Big|_0^{\infty}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}Q\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\eta^2}Q\eta d\tau\right]=$$
$$=\frac{1}{a^2}\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\eta^2}\right]Q(x\pm l,$$
$$y-\eta,t-\tau)+\int_0^t\varphi_2(0,\tau)\left.\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}d\tau$$

Лемма 3 доказано.

**Лемма 4.** Если функция $\psi(x,t)\in C^2_x$ ограничена, то функция $W[\psi]\in C^2_x$ и представим в виде

$$D^2_xW[\psi]=\int_0^t\partial\tau\int_0^t\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}Q(x\pm l,t-\tau)\left.\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}d\xi+$$
$$+\int_0^t\psi(0,\tau)\left.\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right|_{x=0}\left.\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}d\tau-$$
$$-\int_0^t\psi'_\xi(l,\tau)Q(x\pm l,t-\tau)\left.\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}d\tau \qquad (28)$$

**Доказательство.** Для этого $W[\psi]$ преобразуем к виду

$$W[\psi]=\int_0^t d\tau\int_0^t\psi(\xi,\tau)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^nG(x-\xi+2nl,$$

$$t-\tau)-G(x+\xi+2nl,t-\tau)\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\xi=$$

$$=\begin{vmatrix}\xi-x=z\\ \xi+x=z\end{vmatrix}=\int_0^t\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\tau\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[\int_{-x}^{l-x}\psi(x+$$

$$+z)G(2nl-z,t-\tau)dz-$$

$$-\int_{-x}^{l+x}\psi(z-x)G(2nl+z,t-\tau)dz]$$

Теперь дифференцируя по $x$ под знаком интеграла, найдем

$$D_xW[\psi]=\int_0^t\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\tau\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[-\psi(l,\tau)G(2n-$$

$$-1)l+x,t-\tau)+\psi(0,\tau)G(2nl+x,t-\tau)+$$

$$+\int_{-x}^{l-x}\psi'_\xi(x+z,\tau)G(2nl-z,t-\tau)dz-$$

$$-\psi(l,\tau)G(2n-1)l+x,t-\tau)+$$

$$+\psi(0,\tau)G(2nl+x,t-\tau)+$$

$$+\int_{-x}^{l+x}\psi'_\xi(z-x,\tau)G(2nl+z,t-\tau)dz$$

Отсюда в силу равенство

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[G(2n-1)l+x,t-\tau)+G(2n+1)l+x,t-\tau)]=0$$

$$D_xW[\psi]=$$

$$=2\int_0^t\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}\{2\psi(0,\tau)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^nG(2nl+x,t-\tau)+$$

$$+\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\{\int_{-x}^{l-x}\psi'_\xi(x+z,\tau)G(2nl-z,t-\tau)dz+$$

$$+\int_{-x}^{l+x}\psi'_\xi(z-x,\tau)G(2nl+z,t-\tau)dz\}d\tau$$

Еще раз, дифференцируя по $x$ получим

$$D_x^2W[\psi]=2\int_0^t\psi(0,\tau)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\partial}{\partial x}G(2nl+x,$$

$$t-\tau)\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\tau+$$

$$+\int_0^t\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\{-\psi'(l,\tau)G(2nl-l+$$

$$+x,t-\tau)-\psi'_\xi(0,\tau)G(2nl+x,t-\tau)+$$

$$+\int_{-x}^{l-x}\psi''_{\xi\xi}(x+z,\tau)G(2nl-z,t-\tau)dz+$$

$$+\psi'_\xi(l,\tau)G(2nl+1)l+x)-\psi'(0,\tau)G(2nl+x,t-\tau)-$$

$$+\int_x^{l+x}\psi''(z-x,\tau)G(2nl+z,t-\tau)dz\}d\tau=$$

$$=2\int_0^t\psi(0,\tau)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\partial}{\partial x}G(2nl+x,t-\tau)\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\tau-$$

$$-\int_0^t\psi'_\xi(l,\tau)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n[G(2n-1)l+x,t-\tau)-$$

$$-G(2n+1)l+x,t-\tau)\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l\psi''_{\xi\xi}(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\eta}G(x\pm\xi,y\pm\xi,t-\tau)\big|_{\eta=0}d\xi$$

Лемма 4 доказано.

На основании выше приведенных утверждений 1)-2)-3) и доказанных лемм 3-4 относительно свободного члена $\Phi(x,y,t)$ справедливо.

**Теорема 1.** Если заданные функции $F(x,y,t)$, $f(x,y)$, $\varphi_i(y,t)$, $\psi(x,t)$ удовлетворяют условиям (7)-(8), то функция представление

$$\Phi''_{xx}(l,y,t)=\frac{\partial^2V[F]}{\partial x^2}\bigg|_{x=l}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}V_0[f]\bigg|_{x=l}+$$

$$+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}W[\varphi_0]\big|_{x=l}+$$

$$+2\int_0^t d\tau\int_0^\infty(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\eta_2})\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^nG(2nl,t-$$

$$-\tau)Q_2(y\pm\eta.t-\tau)d\tau+$$

$$+a^2\int_0^t d\tau\int_0^l\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}Q_1(l\pm\xi,t-\tau)\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\xi-$$

$$-\int_0^t\psi(0,\tau)\frac{\partial Q_1}{\partial x}\bigg|_{\substack{\xi=0\\x=l}}\frac{\partial Q_2}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}d\tau \qquad (29)$$

**5. Нахождение нагруженного слагаемого** $u_{xx}(l,y,t)$

Для этого, учитывая представление (21) и лемма 1, уравнения (16) перепишем в виде

$$u(x,y,t) = -a^2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_{xx}(l,\eta,\tau) Q_2(y \pm \eta, t-\tau) d\eta -$$

$$- a^2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_{xx}(l,\eta,\tau) K_1(x,t-\tau) Q_2(y \pm$$

$$\pm \eta, t-\tau) d\eta + \Phi(x,y,t) \qquad (30)$$

Отсюда, дифференцируя по $x$ два раза и полагая $x = l$ относительно $u_{xx}(l,y,t)$ следующее интегральные уравнение Вольтера-Фредгольма 2-го рода

$$u_{xx}(l,y,t) = -a^2 \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_{xx}(l,\eta,\tau) \frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}\Big|_{x=l} Q_2(y \pm$$

$$\pm \eta, t-\tau) d\eta + \Phi_{xx}(l,y,t) \qquad (31)$$

В силу выше доказанного неравенства (23) функция $\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_1(l,t-\tau)$ непрерывна и ограничена, а $Q_2(y \pm \eta, t-\tau)$ имеет слабую (интегрируемую) особенность.

Поэтому полученное интегральное уравнения (31) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательные приближения. Найденную функцию $u_{xx}(l,y,t)$ подставляя в формулу (15), получим решение краевой задачи (10)-(2)-(3)-(5)-(6). Тем самым доказана существование регулярного решения краевой задачи для уравнения составного типа (1)-(6). Полученные результаты можно подытожить в виде.

**Теорема 2.** Если заданные функции $F(x,y,t)$, $f(x,y)$, $\varphi_i(y,t)$, $\psi(x,t)$ удовлетворяют условиям (7) и условиям согласования (8), то регулярное решение $u(x,y,t)$ краевой задачи (1)-(6) определяются формулой (15), то неизвестная функция $u_{xx}(l,y,t)$ находится из интегрального уравнения (31).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орынбасаров М.О.* «Теория тепловых потенциалов и ее применение». Изд. «Қазақ университеті», 2005г., 70 стр.

2. *Орынбасаров М.О.* «Краевая задача для уравнения 4-го порядка составного типа с оператором теплопроводности». Вестник КазНУ спец. выпуск №1., 2006г., с. 27-30.

3. *Орынбасаров М.О.* «Краевая задача для уравнения 4-го порядка составного типа с переменными коэффициентами». МНК «Асимптотические топологические и компьютерные методы математики». Бишкек, 13-17 сентября, 2006г., с. 42.

**Резюме**

Жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуге келтіру әдісімен 3-ретті құрама теңдеу үшін аралас шекаралық есептің регулярлық шешімі бар екені Грин функциялары мен жылу потенциалдар теориясын пайдаланып дәлелденген.

**Summary**

The existence of regular solution of some boundary problem is proved. The forced technique of heat equation using Green function and heat potential is used.