

ПОРЯДИН В.И.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФОРМЫ ЗАКОНА ДАРСИ КАК ОТРАЖЕНИЕ ВОЛНОВЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИИ

Сүзілу күштерін талдау барысында, Дарсидің сүзілу заңын жетілдірудегі сүзілу үрдісі тек гравитациялық қана емес және дыбыс (акустика) толқындарын да тудырады. Сүзілудің толқынды қураушылары параболалық (пьезоөткізгіштік) және гиперболалық (дыбыс жылдамдығы) теңдеулер көрсеткіштерін құрайтын, импульс тасымалдануының релаксациялық уақытын ескере отырып, Дарси теңдеуінің өзгеруімен дәлелденеді. Эйлер гидродинамикасы теңдеуінің инерциялық мүшесін есепке алуды қалпына келтірудің Дарси заңының өзгерілген пішімі әдісімен іске асуы толқын қасиеттерімен қоса классикалық материалдардың «дуализмін» кескіндейді.

Модификация закона фильтрации Дарси на основе анализа фильтрационной силы свидетельствует, что процесс фильтрации порождает не только гравитационные, но и акустические волны. Волновая составляющая фильтрации подтверждается преобразованием уравнения Дарси путем учета времени релаксации переноса импульса, содержащего параметры параболического (пьезопроводность) и гиперболического (скорость звука) уравнений. Возврат к учету инерционного члена уравнения гидродинамики Эйлера, осуществленный в модифицированных формах закона Дарси, отражает волновые свойства и, тем самым, «дуализм» классической материи.

Modification of Darcy law on the basis of uplift force analysis witnesses that filtering process generates not only gravity but acoustic waves as well. A wave component of filtering is confirmed also by transformation of Darcy equation taking into account the relaxation time for carrying the pulse, containing parameters of parabolic (piesoconductivity of bed) and hyperbolic (velocity of sound) equations. Return to account of the inertial term of the equation of Euler hydrodynamics, realized in modified forms of Darcy law, reflects the wave properties and eo ipso «dualism» of classical matter.

Основным законом фильтрации – гравитационного течения вязкой несжимаемой жидкости в пористой среде, является закон Дарси. Открытие и экспериментальное обоснование закона принадлежит французскому инженеру-гидравлику А. Дарси [9], теоретическое – русскому ученому Н.Е. Жуковскому [2].

За основу построения дифференциальных уравнений фильтрации Н.Е. Жуковский принял уравнение гидродинамики идеальной жидкости Эйлера

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}p + \rho g, \quad (1)$$

рассматриваемой в гидродинамике в качестве сплошной недеформируемой (несжимаемой) среды, где внутренние силы приводятся к нормальному давлению. Это значит, что если выделить в такой несжимаемой среде некоторый объем $V = dx dy dz$, ограниченный поверхностью S , то действие на него оставшейся части среды, приводится к силе, направленной в каждой точке по-

верхности S по внутренней нормали. Обозначая величину этой внешней статической силы, отнесенной к единице площади, через давление p , запишем равнодействующую сил давления на поверхности S объема V

$$-\iint_{(S)} p S = -\iiint_{(V)} \text{grad}p dV. \quad (2)$$

Заметим, что для сжимаемой среды пористостью n объем следовало записать $V = ndxdydz$, так что уравнение неразрывности с учетом плотности воды ρ должно было бы выглядеть как $\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$. Однако для рассматрива-

¹ Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Ч. Валиханова, 94. Институт гидрогеологии и геоэкологии им. У.М. Ахмедсафина.

емой нами идеальной жидкости Эйлера плотность неизменна, $\rho = \text{const}$, так что в пренебрежении сжимаемостью породы, уравнение неразрывности упрощается до выражения $\operatorname{div} v = 0$.

Внутренние статические силы, действие которых не зависит от присутствия других частей жидкости, кроме рассматриваемого элемента объема V , а численное значение пропорционально массе этого элемента, составляют массовые (объемные) силы F_V , равнодействующая которых в объеме V записывается как:

$$\iiint_V \rho F_V dV. \quad (3)$$

Объемный характер процесса фильтрации и невозможность рассмотрения и описания траекторий и скоростей частиц жидкости в сложной структуре пористой среды обязывает рассматривать силы сопротивления, оказываемые этой средой, как объемные. Поэтому Н.Е. Жуковский вводит понятие о динамической силе сопротивления песков при фильтрации через них воды как об объемной силе, отнесенной к единице массы [2]. Эту силу он записывает, в соответствии с законом трения Ньютона [3]

$$F_{\text{тр}} = -\alpha v, \quad (4)$$

где v – скорость движения, α – коэффициент трения, в виде [2]

$$F = -\frac{\mathbf{g}v}{k} \quad (5)$$

где $k = K \frac{\rho g}{\eta}$ – коэффициент фильтрации (коэффи-

циент сопротивления – по Н.Е. Жуковскому), v – вектор скорости фильтрации, \mathbf{g} – вектор ускорения силы тяжести (напряжение силы тяжести, по

Н.Е. Жуковскому), $\alpha = \frac{g}{k}$ – коэффициент трения.

Действительно, динамические силы определяются тем, что при движении жидкости в пористой среде эта последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение жидкости. Силы сопротивления такому движению жидкости в пористой среде определяются силами внутреннего трения в жидкости – вязкостью, зависящей только от скорости движения. Согласно же закону трения Ньютона (4), действительного для малых значений скорости движения, силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости самого движения v .

Итак, равнодействующая сил сопротивления (сил вязкости) в объеме V записывается как

$$\iiint_V \frac{\mathbf{g}v}{k} dV. \quad (6)$$

Суммируя равнодействующие сил давления (2), массовых сил (3) и сил сопротивления (6), запишем, согласно Даламберу, уравнение равновесия

$$\iiint_V (\rho F_V - \operatorname{grad} p - \frac{\mathbf{g}v}{k}) dV = 0. \quad (7)$$

В силу произвольности объема V , подынтегральная функция (7) равна нулю; следовательно, равно нулю и выражение в скобках – баланс сил,

$$\rho F_V - \operatorname{grad} p - \frac{\mathbf{g}v}{k} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, в силу малой величины скорости движения жидкости при фильтрации, Н.Е.-Жуковский заменяет в уравнении гидродинамики *идеальной жидкости* Эйлера (1) инерционные силы, пропорциональные ускорению движения, силами сопротивления пористой среды при движении в ней *реальной жидкости*, пропорциональными первой степени скорости движения, а именно:

$$\rho \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{\mathbf{g}v}{k} = \frac{\eta v}{K\rho}. \quad (9)$$

Если в уравнении (8) пренебречь массовыми (объемными) силами в сравнении с поверхностными, то получим закон фильтрации Дарси (в дальнейшем изложении – закон Дарси)

$$v = -\frac{K}{\eta} \operatorname{grad} p, \quad (10)$$

где K – коэффициент проницаемости [9]. Коэффициенты проницаемости и фильтрации связаны зависимостями

$$\frac{k}{\rho g} = \frac{K}{\eta} \quad \text{или} \quad \frac{k}{g} = \frac{K}{\nu}, \quad (11)$$

где η , $\nu = \eta/\rho$ – динамическая и кинематическая вязкость жидкости, соответственно. Следовательно, закон Дарси (10) можно записать в трех видах:

$$v = -\frac{k}{\rho g} \operatorname{grad} p = -\frac{K}{\eta} \operatorname{grad} p = -\frac{K}{\rho \nu} \operatorname{grad} p \quad (10a)$$

т.е. коэффициент пропорциональности в формуле Дарси оказался «расщепленным» на два пара-

метра – k и $\eta(v)$. Первый зависит только от свойств пористой среды – проницаемости, второй зависит только от свойств фильтрующейся жидкости – вязкости (динамической или кинематической).

Рассмотрение движения жидкости в поле тяжести Земли с напряженностью поля массовых сил $\mathbf{F}_v = -\mathbf{g}$ уравнение (8) дает двучленный закон Дарси:

$$\mathbf{v} = -\frac{K}{\eta} (\text{grad} p - \rho g) = -\frac{K}{\eta} \mathbf{f}, \quad (12)$$

где $\mathbf{f} = (\text{grad} p - \rho g)$ – фильтрационная сила (движущая сила фильтрации).

Как видим, в основе уравнения Дарси (10) и его обобщенного аналога – уравнения (12), лежит *пренебрежение силами инерции в сравнении с силами вязкого сопротивления* на огромных поверхностях раздела жидкой и твердой фаз пористых сред. Такие движения называются *ползущими* (по Стоксу) – в них, согласно Ньютону [3,9], сопротивление движению пропорционально первой степени скорости (4).

Двучленный закон Дарси (12) является основой физико-математического анализа и моделирования процессов фильтрации подземных вод, при этом важнейшая роль в нем принадлежит фильтрационной силе.

В этой связи, обращаясь к анализу фильтрационной силы, оттолкнемся, прежде всего, от статического состояния жидкости и выясним условия ее равновесия. В этом случае движение отсутствует, т.е. скорость равна нулю и фильтрационная сила принимает также нулевое значение

$$\mathbf{f} = 0,$$

что дает

$$(\text{grad} p - \rho g) = 0,$$

т.е. основное уравнение гидростатики – уравнение Эйлера,

$$\rho \mathbf{F} = \text{grad} p, \quad (13)$$

при условии, что единственной массовой силой

$$\mathbf{F} = \frac{\text{grad} p}{\rho}$$

является сила тяжести, характеризуемая ускорением \mathbf{g} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}.$$

Исключим из уравнения гидростатики Эйлера плотность и давление, для чего возьмем опе-

рацию вихря от обеих частей

$$\text{rot}(\rho \mathbf{F}) = \text{rot grad} p.$$

Для потенциального течения – безвихревого движения жидкости или газа, при котором каждый малый объем деформируется и перемещается поступательно и не имеет вращения (вихря), имеем

$$\text{rot} \nabla p = 0,$$

откуда следует

$$\text{rot}(\rho \mathbf{F}) = 0. \quad (14)$$

Используя правила векторного анализа и раскрывая скобки, получим

$$\rho \text{rot} \mathbf{F} + \nabla p \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (15)$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на \mathbf{F} , замечая, что второе слагаемое как векторное произведение перпендикулярно своему сомножителю \mathbf{F} , получим условие существования поверхностей, нормальных к силовым линиям поля силы тяжести:

$$\mathbf{F} \cdot \text{rot} \mathbf{F} = 0. \quad (16)$$

К числу объемных сил, удовлетворяющих этому условию относятся силы, имеющие потенциал U , так что для них

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \text{rot} \mathbf{F} = 0. \quad (17)$$

В таком случае

$$\nabla p \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (18)$$

откуда следует, что *при равновесии среды силовые линии поля потенциальных объемных сил ортогональны изостерам – поверхностям одинаковой плотности и что изостеры совпадают с изопотенциальными поверхностями силового поля* [5].

Из уравнения гидростатики Эйлера следует также и то, что *при равновесии среды силовые линии перпендикулярны к изобарам – поверхностям одинакового давления*.

Таким образом, в общем случае *при равновесии жидкости под действием потенциального поля объемных сил изопотенциальные поверхности поля совпадают с изобарами и изостерами, и обратно – если изобары совпадают с изостерами, то равновесие жидкости возможно только под действием потенциального поля объемных сил*

$$\nabla p \times \nabla \rho = 0. \quad (19)$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) условие равновесия показывается следующим образом [5]. Из уравнения гидростатики Эйлера

(13) следует:

$$-\rho \nabla U = \nabla p \quad (20)$$

или

$$\rho U + p = \text{const.} \quad (21)$$

Для двух несмешивающихся жидкостей разной плотности $\rho_1 < \rho_2$, находящихся во взаимном равновесии, на границе раздела этих жидкостей давление p и потенциал U неразрывны. Тогда производная от левой части равенства (21) по любому направлению l , лежащему в касательной плоскости к поверхности раздела запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dl} + \rho_1 \frac{dU}{dl} &= 0; \\ \frac{dp}{dl} + \rho_2 \frac{dU}{dl} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

или, после вычитания в системе (22) второго уравнения из первого,

$$(\rho_1 - \rho_2) \frac{dU}{dl} = 0. \quad (23)$$

Поскольку $\rho_1 \neq \rho_2$, то из (23) следует $U = \text{const}$, т.е. при равновесии двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей разной плотности в потенциальном поле объемных сил (в поле силы тяжести) граница раздела жидкостей будет одновременно и изопотенциальной поверхностью и изобарной. Следовательно, условие статического равновесия требует горизонтальности границы раздела подземных вод различной плотности. Это условие удобно расписать по координатам пространства

$$\frac{dp}{dx} = 0; \frac{dp}{dy} = 0; \frac{dp}{dz} = \rho g; \frac{d\rho}{dx} = 0; \frac{d\rho}{dy} = 0, \quad (24)$$

учитывая, что $dU/dx = 0$, $dU/dy = 0$, $dU/dz = \rho g$. При этом, распределения давлений и плотности

$$p = p_0 + \int_{(z)} g \rho(z) dz \quad (25)$$

взаимного однозначны, если задан закон изменения плотности по вертикали: $\rho(z)$.

Поэтому, необходимыми и достаточными условиями потенциальности течения – безвихревого движения жидкости или газа, при котором деформация и перемещение малого объема жидкости происходит без вращения (вихря) и где действие сил вязкости ничтожно мало по сравнению с действием сил давления, являются следующие

равенства:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}.$$

Итак, поверхность грунтовых и напорных подземных вод, находящейся в равновесии в поле тяжести – плоско-горизонтальная. Однако, под влиянием внешнего разового, периодического или апериодического природно-техногенного воздействия, а также неоднородной плотности подземных вод поверхность выводится из равновесного положения, что порождает движение в подземной воде. Это движение будет распространяться вдоль по поверхности грунтовых (напорных) подземных вод в виде т.н. гравитационных волн, захватывая внутренние ее слои тем меньше, чем глубже эти слои расположены.

Будем рассматривать такие гравитационные волны, в которых скорость движения частиц жидкости настолько мала, что в уравнении гидродинамики Эйлера (1)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{g}.$$

можно пренебречь членом $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ по сравнению с $\partial \mathbf{v} / \partial t$ и записать.

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \ll \partial \mathbf{v} / \partial t.$$

Это условие эквивалентно требованию

$$A \ll \lambda,$$

т.е. амплитуда колебаний волны A должна быть мала по сравнению с длиной волны λ .

Будем также полагать малость длины волны по сравнению с расстояниями, на которых поле тяжести вызывает заметное изменение плотности, вызванной сжимаемостью жидкости (воды); вместе с тем, самую жидкость рассматриваем несжимаемой, т.е. пренебрегаем изменением ее плотности, связанным с изменением давления в волне – звуковым давлением и изменением плотности жидкости – ее расширением, связанным с геотемпературой. Это значит, что движение жидкости остается потенциальным, при котором каждый малый объем жидкости деформируется и перемещается поступательно и не имеет вращения (вихря) [5].

Дальнейший анализ описываемого законом Дарси гравитационного движения жидкости в пористой среде, свидетельствует, что процесс фильтрации порождает не только гравитационные, но и акустические (звуковые) волны. Покажем это, для чего обратимся к анализу физического

содержания потенциального движения жидкости под действием фильтрационной силы (12) и с этой целью преобразуем эту силу к виду

$$\mathbf{f} = \nabla p - \rho g = \rho g \left(\frac{1}{g} \cdot \frac{\nabla p}{\rho} - 1 \right). \quad (26)$$

Из гидростатического уравнения (13)

$$\nabla p = \rho g$$

и соотношения градиентов плотности и давления [4]

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho = c^2 \nabla \rho, \quad (27)$$

где c – скорость звука в жидкости, имеем следующие соотношения

$$\nabla p = \left(\frac{\rho}{c^2} \right) \mathbf{g} \text{ или } \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\mathbf{g}}{c^2}, \quad (28)$$

показывающие, что существенное изменение плотности в поле тяжести происходит на расстоянии [4]

$$H \sim \frac{c^2}{g} = \frac{\rho}{\nabla p}. \quad (29)$$

Далее, преобразуем соотношение градиентов плотности и давления следующим образом

$$\frac{\nabla p}{\rho} = c^2 \frac{\nabla \rho}{\rho}. \quad (30)$$

Подставив (30) в (26), получим три варианта выражения фильтрационной силы:

$$\mathbf{f} = \rho g \left(\frac{c^2}{v_g^2} - 1 \right) = \rho g \left(\frac{c^2}{gH} - 1 \right) = \rho g \left(\frac{1}{BH} - 1 \right), \quad (31)$$

где $v_g = \sqrt{gH}$ – скорость распространения гравитационной волны в жидкости, H – глубина равновесного потока инфильтрации, $B = \frac{g}{c^2}$ – адиабатический градиент плотности.

Выражение фильтрационной силы (31) можно преобразовать еще и так

$$\frac{\mathbf{f}}{\rho g} + 1 = \frac{c^2}{gH} = \frac{c^2}{v_g^2} = \frac{1}{BH}. \quad (32)$$

Запишем и проанализируем конкретные варианты выражения (32):

$$c = \sqrt{gH(I_f + 1)}, \quad (33)$$

$$c = v_g \sqrt{(I_f + 1)}, \quad (33a)$$

$$I_f + 1 = \frac{1}{BH}, \quad (33b)$$

а также комбинации выражений (33, 33a, 33b)

$$c = \sqrt{\frac{g}{B}}, \quad (33b)$$

$$\frac{c^2}{v_g^2} = \frac{1}{BH}, \quad (33c)$$

где $I_f = \frac{\mathbf{f}}{\rho g} = \left(\frac{\nabla p}{\rho g} - 1 \right)$ – безразмерный градиент фильтрационной силы.

Из (33) при $I_f = 1$, когда выполняется условие гидростатического равновесия для идеальной несжимаемой жидкости Эйлера

$$\nabla p = \rho g,$$

имеем закон течения Торичелли

$$v = \sqrt{2gH}, \quad (34)$$

являющийся, как известно, решением уравнения Бернулли для стационарного движения несжимаемой жидкости

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - gH = \text{const}, \quad (35)$$

притом что само уравнение Бернулли является решением уравнения гидродинамики Эйлера (1). Заметим, что скорость течения Торичелли в точности равна скорости жидкости, падающей с высоты H .

Другой вариант выражения (32):

$$c = v_g \sqrt{I_f + 1} \quad (33a)$$

показывает, что равенство скоростей гравитационной и акустической волн выполняется при $I_f = 0$, что равносильно условию $\mathbf{f} = 0$ ($\rho g \neq 0$), а это условие возможно в состоянии гидростатического равновесия Эйлера $\nabla p = \rho g$.

Наиболее интересно выражение (33b)

$$c = \sqrt{\frac{g}{B}},$$

позволяющее оценить значение адиабатического градиента плотности (31)

$$B = \frac{g}{c^2}.$$

Для значения скорости звука в чистой воде как несжимаемой жидкости $c = 1435 \text{ м/с}$ и уско-

рении свободного падения $g = 9,8066 \text{ м/с}^2$ это дает величину адиабатического градиента плотности

$$B = 4,76 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1}.$$

Следовательно, значение сжимаемости чистой воды (плотностью $\rho = 1 \text{ г/см}^3$) оказывается равным

$$\beta = \frac{B}{\rho g} = 4,82 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1},$$

что согласуется с экспериментальным ее значением при комнатной температуре и атмосферном давлении [3]:

$$\beta_{\text{эксп}} = 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ бар}^{-1}.$$

Наконец, используя модифицированное выражение фильтрационной силы (31), запишем закон потенциального движения жидкости в пористой среде – закон фильтрации Дарси (12), сопровождающейся, как показано выше, гравитационным и акустическим волновыми процессами, в следующих трех модифицированных видах:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{K}{\eta} \rho g \left(\frac{c^2}{gH} - 1 \right) = \\ &= -\frac{K}{\eta} \rho g \left(\frac{c^2}{v_g^2} - 1 \right) = -\frac{K}{\eta} \rho g \left(\frac{1}{BH} - 1 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Одновременное существование двух форм закона Дарси-Жуковского (2.8.1 и 2.11.12, 2.11.13) является свидетельством «дуализма» классической материи, характерного, как известно, для физических процессов атомно-молекулярного уровня материи в рамках квантовой (волновой) механики, для которой исходным постулатом является принцип неопределенности Гейзенберга [9], исключающим классическую струйность течения (существование траекторий движения частиц материи), поскольку описание состояния физической системы с использованием классического подхода, предполагающего одновременную фиксацию координат и скоростей частиц, в рамках квантовой (волновой) механики невозможно (исключено).

Вместе с тем, нельзя забывать, что ньютона (классическая) физика является составной частью квантовой механики. Суть в том, что квантовая механика, занимая своеобразное положение в ряду современных физических теорий, содержит классическую механику как свой предельный случай и в тоже время нуждается в этом

предельном случае для самого своего обоснования [9].

Установление «дуализма» закона фильтрации Дарси в рамках классической гидродинамики отнюдь не парадоксально, поскольку понятие волны охватывает чрезвычайно разнообразные движения в системах любой природы. Даже общепринятое разделение объектов на «волны» и «частицы» не имеет абсолютного характера. Так, в квантовой физике микрообъекты «объединяют» в себе свойства частиц и волны, что означает возможность двоякого описания их поведения в рамках корпускулярно-волнового дуализма. Такого рода «дуализм» встречается и в макроскопических масштабах: уединённые волновые возмущения, локализованные в ограниченных областях пространства, проявляют свойства дискретных объектов (частиц или квазичастиц) и, в частности, способность сохранять неизменной свою структуру при столкновениях (взаимодействиях) друг с другом [9].

Движение эйлеровой идеальной жидкости, лишенной внутреннего трения (вязкости), но сохраняющее непрерывность распределения физических величин, в т.ч. непрерывность движения присущее механическим движениям в пространственно распределённых системах – т.н. системам с распределёнными параметрами. Например, продольные волны в жидкостях способны перемещаться в пространстве и тем самым переносить энергию, количество движения (импульс) и другие величины за счёт последовательной передачи их от одних частиц к другим без обязательного переноса самих частиц вместе с акустической волной. В акустических волнах сжатие отдельного участка упругой среды повышает давление в нём, что приводит в движение соседние частицы. Следовательно, важнейшим свойством волновых движений в целом является наличие локальной, близкодействующей, связи между возмущениями в соседних точках пространства. В частности, изменение уровня подземных вод приводит к нарушению равновесия в прилегающих областях и благодаря силе тяжести, стремящейся восстановить равновесие, движение захватывает всё новые частицы воды, тем самым порождая как гравитационные, так и акустические волны (волны звукового давления), сопровождающие «волны» пьезопроводности («волны» давления)

$$a = \frac{K}{\eta \beta^*} \quad (37)$$

(a – пьезопроводность, K – проницаемость; η – динамический коэффициент вязкости; $\beta^* = (\eta \beta_b + \beta_{pl})$ – коэффициент упругоемкости пласта, η – эффективная пористость пласта, β_b, β_{pl} – сжимаемость воды и пласта, соответственно), притом, что пьезопроводность и акустическая скорость взаимосвязаны временем релаксации переноса импульса [1,6-9]

$$\tau = \frac{a}{c^2}. \quad (38)$$

Следовательно, можно утверждать, что волны могут распространяться и в условиях общего (дрейфового) сноса среды (течения) и даже сами вызывать такой снос, но роль этих дрейфов во многих случаях пассивна – в том смысле, что они, видоизменяя характер волн, не предопределяют саму возможность их существования.

Для выяснения особенностей движения идеальной жидкости (газа), зависящей от термодинамического его состояния, важно сравнить скорость его движения со скоростью распространения малых возмущений – волн. Волны представляют собой изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства. В этой постановке рассмотрим баротропный поток идеальной жидкости, все линии тока которого параллельны оси x , а составляющая скорости v_x , также как давление p , плотность ρ и температура T , является функцией только x и t ; при этом пренебрегаем действием объемных сил.

Основное дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости в переменных Эйлера (1) и уравнение неразрывности в этом случае сводятся к нелинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных [5]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Чтобы сделать систему определенной, необходимо в случае баротропного движения до-

бавить уравнение связи p и ρ (уравнение состояния) и уравнение баланса энергии, а также начальные и граничные условия. Обозначая через v_x , p и ρ скорость, давление и плотность возмущенного движения, через p_0 и ρ_0 – давление и плотность в покоящейся жидкости, через v'_x , p' и ρ' – малые возмущения скорости, давления и плотности имеем следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v'_x, \\ p &= p_0 + p', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Подставим эти значения возмущенных элементов в систему уравнений (39) и отбросим в них произведения малых величин и их производных по координатам, как малые высших порядков. Тогда, замечая, что с точностью до малых величин первого порядка малости имеем

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dx} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \cdot \frac{d\rho'}{dx},$$

получим вместо нелинейной системы (39) следующую линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными v'_x и ρ'

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v'_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Система (41) является линеаризованной по сравнению с системой (39).

Замечая, что величина $dp/d\rho$ положительна, так как плотность совершенного газа растет с давлением, введем обозначение

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = c_0^2 \quad (42)$$

и перепишем систему (41) в форме

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial t} &= -c_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} &= -\frac{\partial \rho'}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Система уравнений (43) может быть сведена к одному уравнению. Дифференцируя обе части первого уравнения системы (43) по времени t , а второго – по x , а затем, умножая обе части второго уравнения на c_0^2 и вычитая его из перво-

го, получим линейное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 v'_x}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} = 0. \quad (44)$$

Аналогичные уравнения найдем для определения ρ' и p' :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0, \quad (46)$$

так как $p' = p - p_0 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 (\rho - \rho_0) = c_0^2 \rho'$.

Общее решение любого из этих уравнений, как известно, можно представить в виде суммы двух произвольных функций

$$v'_x = f_1(x + c_0 t) + f_2(x - c_0 t), \quad (47)$$

с частными решениями

$$v'_x = f_1(x + c_0 t) \quad \text{и} \quad v'_x = f_1(x - c_0 t). \quad (48)$$

Полагая в этих решениях

$$(x + c_0 t) = \text{const} \quad \text{и} \quad (x - c_0 t) = \text{const}. \quad (49)$$

получим систему двух стационарных бегущих навстречу друг другу плоских волн, представляющую две, движущиеся в противоположные стороны со скоростью c_0 перпендикулярные оси x плоскости, каждая из которых несет постоянные, заданные начальными условиями, значения возмущений скорости, давления, плотности и температуры; такие волны именуются *простыми*.

Таким образом, общее решение уравнения (48) складывается из решений, соответствующих двум распространяющимся в противоположные стороны простым волнам; само гиперболическое уравнение является одномерным волновым уравнением. С геометрической точки зрения полученное решение можно интерпретировать как наличие в плоскости (x, t) двух семейств прямых (49) с угловыми коэффициентами $\pm c_0$, обладающих тем свойством, что вдоль каждой из этих прямых сохраняются постоянные значения заданных начальными условиями возмущений скорости и других параметров жидкости (газа). Общая для обеих волн скорость c_0 именуется скоростью распространения малых возмущений или скоростью звука.

Если предположить, что процесс распространения малых возмущений (звука) происходит настолько быстро, что можно пренебречь влиянием сравнительно медленного процесса отвода тепла, т.е. считать процесс распространения малых возмущений адиабатическим, то скорость звука запишется выражением (скорость звука по Лапласу)

$$c_0 = \sqrt{\chi \frac{dp}{d\rho}},$$

где χ – адиабатический коэффициент Пуассона [5].

Частным случаем стационарных бегущих волн являются синусоидальные колебания – простейшие волновые движения, характерные для гармонических осцилляторов, вида

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx - \phi_0)$$

или в случае распространения волны в произвольном направлении

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} - \phi_0),$$

где A – амплитуда волны, ω – угловая частота, \mathbf{k} – волновой вектор (его модуль k – волновое число); ϕ_0 – фаза. Функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ периодична как во времени (с периодом $T = 2\pi/\omega$), так и в пространстве (с периодом $\lambda = 2\pi/k$, называемым длиной волны).

Применяется также комплексная запись волны:

$$\psi(r, t) = A \exp(i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})),$$

где A – комплексная амплитуда волны. Комплексное выражение волны объединяет два волновых движения, описываемых реальной и мнимой частями [9].

Уравнение гиперболического типа можно получить, исходя из уравнения параболического типа, широко используемого при изучении нестационарных природных процессов переноса: диффузии (молекулярный перенос масс), теплопроводности (молекулярный перенос энергии) и импульса (молекулярный перенос импульса, характерный для фильтрации). Во всех случаях переноса происходит выравнивание свойств тела (среды), если первоначально эти свойства (состав, температура или скорость течения жидкости при фильтрации) были неодинаковы в разных местах тела; тем самым происходит приближение к состоянию равновесия, характерного для необратимых процессов переноса.

Математической моделью необратимых процессов переноса субстанции: тепла (энергии), массы (вещества) и импульса (количество движения), является параболическое уравнение [1]

$$\frac{1}{a} \frac{dQ}{dt} - \Delta Q = \frac{1}{a} w, \quad (50)$$

где Q и w плотность переносимой субстанции и мощность ее источников, соответственно; Δ – лапласиан; a – параметр характерный для данного явления переноса; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ – полная производная по времени ($\frac{\partial}{\partial t}$ – локальное изменение во времени и $\mathbf{v} \cdot \nabla$ – конвективный перенос).

Параболическое уравнение (50) следует из гипотезы переноса, объединяющей линейные законы Фурье, Фика, Ома, Дарси [1,3,6],

$$\mathbf{q} = -a \mathbf{v} \cdot \nabla Q, \quad (51)$$

где \mathbf{q} – вектор плотности потока субстанции (массы, энергии, импульса) и закона сохранения (уравнение неразрывности)

$$w - \frac{dQ}{dt} = \text{div} \mathbf{q}. \quad (52)$$

Характерной особенностью параболического уравнения является принятие бесконечно большой (мгновенной) скорости распространения эффекта возмущения параметра \mathbf{q} в любой точке поля, что физически невозможно в упругой среде. Это неверно, прежде всего, потому, что процесс распространения взаимодействий является мгновенным лишь в несжимаемой жидкости – в сжимаемой жидкости он конечен и равен скорости звука. Однако и жидкость и геофильтрационная среда в параболическом уравнении рассматриваются как сжимаемые, как это и есть в действительности, которая учитывается коэффициентом пьезопроводности (37), включающим упругость пластика (β^*).

Учет упругости среды фильтрации и конечной скорости распространения возмущения в упругой среде возможен лишь введением в параболическое уравнение инерционного члена переноса, обеспечивающего учет времени релаксации переноса

$$\tau = \frac{a}{c^2}. \quad (38)$$

Следовательно, уравнение фильтрации Дарси с учетом времени релаксации переноса импульса, учитывающей волновую природу геофильтрации, установленную выше, приобретает вид [1,6]

$$\mathbf{q}(x, y, t) = -\text{grad}Q(x, y, t) - \tau \frac{\partial \mathbf{q}(x, y, t)}{\partial t}, \quad (53)$$

где c – скорость передачи гидрогеодинамического возмущения в геофильтрационной среде (скорость звука). Легко видеть, что только при $c \rightarrow \infty$ классический закон Дарси вытекает из выражения (53). Поскольку величина τ для фильтрационной дисперсии очень велика $\sim 10^{10} \div 10^{13}$ с, становится очевидным, что поправка $\tau d\mathbf{q}/dt$ существенна, когда величина $d\mathbf{q}/dt$ очень мала, что характерно для региональной геофильтрации [6-8].

Таким образом, принятие закона (53) приводит к гиперболическому уравнению переноса, описывающему процесс распространения колебаний [1],

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{a} \frac{dQ}{dt} = \Delta Q + \frac{1}{a} w + \frac{1}{c^2} \frac{dw}{dt}, \quad (54)$$

где $Q(x, y, t)$ – напор подземных вод; $w(x, y, t)$ – интенсивность инфильтрации (количество просачивающейся воды на единицу площади в единицу времени); a – коэффициент пьезопроводности; Δ – лапласиан; $c = \sqrt{\frac{a}{\tau}}$ – скорость распространения звука, которая при $\tau \neq 0$ отлична от бесконечности.

Гиперболическое уравнение переноса отличается от параболического двумя новыми слагаемыми. Первое, $\frac{1}{c^2} \frac{d^2Q}{dt^2}$, отражает тот факт, что процесс переноса в действительности носит гиперболический, волновой характер. Второе,

$\frac{1}{c^2} \frac{dw}{dt}$, показывает, что на баланс субстанции оказывает влияние не только мощность источника, но и полное изменение этой мощности во времени. Следовательно, модель фильтрации параболического типа заменяется моделью более емкой и более адекватной, содержащей факт конечности скорости передачи возмущения в фильтрующейся среде. Это уравнение описывает так-

же волновые, а не только чисто диссипативные, стремящиеся к выравниванию, процессы [3].

При оценке доминирования в уравнении (54) гиперболических или параболических свойств полезно перейти к безразмерным переменным. В этом случае вопрос сводится к оценке релаксационного числа Пекле или Фурье[1,8,9]

$$Pe_\tau = F_{0\tau}^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{a\tau}} = \frac{xc}{a}, \quad (55)$$

т.е. к оценке безразмерной скорости передачи сигнала: при $Pe_\tau \gg 1$ справедливо параболическое уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{dQ}{dt} = \Delta Q + \frac{1}{a} w, \quad (56)$$

при $Pe_\tau \ll 1$ – волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 Q}{dt^2} = \Delta Q + \frac{1}{c^2} \frac{dw}{dt}, \quad (57)$$

при $Pe_\tau \sim 1$ – уравнение (54).

Уравнение (54) описывает процесс распространения колебаний при наличии «сопротивления»

$$\frac{w}{\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{dQ}{dt} - \frac{dw}{dt}, \quad (58)$$

исключив которое, получим, аналогичное (44), уравнение свободных колебаний

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = c^2 \Delta Q. \quad (59)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М., 1980.

2. Жуковский Н.Е. Теоретические исследования о движении подпочвенных вод // Собрание сочинений. Т. 3. М., 1949. С. 184-206.

3. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Либшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М., 1965.

4. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. IV. Гидродинамика. М. 1988.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1970.

6. Лыков А.В. Тепломассообмен. Справочник. М., 1972.

7. Порядин В.И. К методике оценки и прогноза интенсивности водообмена, загрязненности и экологического качества подземных вод для целей ГМПВ // Изв. НАН РК. Серия геол. 2005. № 3. С. 78-86.

8. Порядин В.И. К методике аналитической оценки естественных гидродинамических параметров пласта в условиях неоднородности с элементами подземной волновой гидродинамики // Известия НАН РК. Серия геол. 2006. № 6. С.36-49.

9. Физическая энциклопедия. М., 1988.