К. Ж. РУСТЕМОВА

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Показана неизолированность вольтеррова оператора теплопроводности от дискретных операторов с полной системой собственных векторов, т.е. в любой малой окрестности оператора теплопроводности найдутся дискретные операторы с полной системой собственных векторов.

1. Введение. В 1935 году Дж. Нейманом была доказана следующая теорема.

Теорема [1, с. 322]. К любому самосопряженному оператору A, действующему в сепарабельном гильбертовом пространстве H, можно прибавить самосопряженный оператор K, не только вполне непрерывный, но даже имеющий сколь угодно малую абсолютную норму и такой, что система всех собственных векторов оператора $A+K$ будет полной в H.

Антиподом самосопряженных операторов являются вольтерровые операторы, которые совсем не имеют собственных значений. Изучением спектральных свойств конечномерных возмущений вольтерровых операторов занимается Хромов А.П. [2]. В связи с результатами этих работ возникает следующая задача.

Постановка задачи. Изучить спектральные свойства возмущенного оператора теплопроводности

$$T_a u = u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + au(1-t,x), \quad (1.1)$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \ u\big|_{x=1} = 0 \quad (1.3)$$

в пространстве $L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, a – произвольное комплексное число, $u(t,x) \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Очевидно [3, с. 24], что оператор T_a и его формально сопряженное T_a^+ плотно определены в пространстве $L^2(\Omega)$, поэтому оператор T_a замыкаем, и есть смысл изучать его спектральные свойства. Из [4, с. 26] следует, что невозмущенный оператор T_0 обратим и обратный оператор T_0^{-1} вольтерров, следовательно

$$T_a u = T_0 u + aSu \text{, где } Su(t,x) = u(1-t,x),$$

$$T_a^{-1} = \left(T_0 + aS\right)^{-1} =$$

$$= \left[T_0\left(I + aT_0^{-1}S\right)\right]^{-1} = \left(I + aT_0^{-1}S\right)^{-1} T_0^{-1}.$$

Если a достаточно малая величина, то имеют место формулы

$$I + aT_0^{-1}S =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^k \left(T_0^{-1}S\right)^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} (-a)^k \left(T_0^{-1}S\right)^k,$$

$$\Rightarrow T_a^{-1} = T_0^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-a)^k \left(T_0^{-1}S\right)^k T_0^{-1}.$$

Таким образом, для достаточно малых a обратный оператор T_a^{-1} существует и вполне непрерывен, стало быть, спектр оператора T_a^{-1} дискретен. Отличие нашей задачи от задачи А. П. Хромова состоит в том, что мы не предполагаем возмущение конечномерным, хотя он является вполне непрерывным и очень малым в смысле нормы. Доказанная нами теорема 3.1 говорит о том, что дело не в величине возмущения, а скорее всего в его алгебраических свойствах.

В работе [6] были исследованы начальные краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности, где роль возмущения играет, так называемая нагрузка. Как отмечено в этой работе, операторы соответствующие этим задачам не замыкаемые, поэтому эти задачи существенно отличаются от рассматриваемой нами задачи.

Поводом для написания настоящей работы послужила работа [7], где детально исследованы спектральные свойства одного класса уравнений с отклоняющимся аргументом. Результаты этой работы частично использованы при работе под этой статьей.

Работа состоит их трех частей, введения, вспомогательной и основной частей. Основные результаты изложены в третьей части.

2. Вспомогательные предложения. Рассмотрим краевую задачу, порождаемую на интервале $(0,1)$ уравнением Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad (2.1)$$

и двумя ($i = 1,2$) граничными условиями

$$\Gamma_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0, \quad (2.2)$$

где $q(x)$ – суммируемая комплекснозначная функция; a_{ik} – произвольные комплексные числа.

Значения параметра $\mu = \lambda^2$, при которых эта краевая задача имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения – собственными функциями. Фундаментальную систему решений уравнения (2.1), определяемую начальными данными $C(\lambda,0) = S'(\lambda,0) = 1$, $C'(\lambda,0) = S(\lambda,0) = 0$, будем обозначать через $C(\lambda,x)$, $S(\lambda,x)$. Так как общее решение $z(\lambda,x)$ уравнения (2.1) является линейной комбинацией функций $C(\lambda,x)$, $S(\lambda,x)$; $z(\lambda,x) = AC(\lambda,x) + BS(\lambda,x)$, то

$$\Gamma_i(z) = A[a_{i1} + a_{i3}C(\lambda,1) + a_{i4}C'(\lambda,1)] + \\ + B[a_{i2} + a_{i3}S(\lambda,1) + a_{i4}S'(\lambda,1)],$$

откуда следует, что краевая задача (2.1)–(2.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$A[a_{11} + a_{13}C(\lambda,1) + a_{14}C'(\lambda,1)] + \\ + B[a_{12} + a_{13}S(\lambda,1) + a_{14}S'(\lambda,1)] = 0,$$

$$A[a_{21} + a_{23}C(\lambda,1) + a_{24}C'(\lambda,1)] + \\ + B[a_{22} + a_{23}S(\lambda,1) + a_{24}S'(\lambda,1)] = 0$$

относительно коэффициентов A, B имеет ненулевое решение.

Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с квадратами корней ее характеристической функций

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{13}C(\lambda,1) + a_{14}C'(\lambda,1) & a_{12} + a_{13}S(\lambda,1) + a_{14}S'(\lambda,1) \\ a_{21} + a_{23}C(\lambda,1) + a_{24}C'(\lambda,1) & a_{22} + a_{23}S(\lambda,1) + a_{24}S'(\lambda,1) \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель и замечая, что вронскиан $W(C,S) = C(\lambda,x)S'(\lambda,x) - C'(\lambda,x)S(\lambda,x)$ тождественно равен единице, находим

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}S(\lambda,1) + \Delta_{14}S'(\lambda,1) + \\ + \Delta_{32}C(\lambda,1) + \Delta_{42}C'(\lambda,1), \quad (2.3)$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$ – определитель, составленный из i- и j-го столбцов матрицы коэффициентов граничных условий $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$.

Собственные значения μ_n краевой задачи (2.1)–(2.2) называются p-кратным, если μ_n является корнем кратности p функций $\Delta(\sqrt{\mu})$.

Граничные условия, удовлетворяющие одному из трех соотношений:

1) $\Delta_{42} \neq 0$; 2) $\Delta_{42} = 0$, $\Delta_{14} + \Delta_{32} \neq 0$; 3) $\Delta_{42} = \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0$, $\Delta_{13} \neq 0$ называем невырожденными.

Известно [5, с. 41], что система собственных и присоединенных функций произвольной краевой задачи (2.1)–(2.2) с невырожденными граничными условиями полна в пространстве $L^2(0,1)$.

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу

$$-\overset{\circ\circ}{\upsilon}(t) = \nu^2\upsilon(t), \quad t \in (0,1), \quad (2.4)$$

$$\upsilon(0) = 0, \quad \overset{\circ}{\upsilon}(0) + a\upsilon(1) = 0, \quad (2.5)$$

где a – произвольная комплексная постоянная, ν^2 – спектральный параметр.

Лемма 2.1. Если

$$tg\sqrt{a^2 - 1} \neq \sqrt{a^2 - 1}, \quad (2.6)$$

то собственные функций краевой задачи (2.4)–(2.5) образуют полную систему в пространстве $L^2(0,1)$.

Доказательство. В силу теоремы 1.3.1 [1, с. 41], достаточно показать, что при условии (2.6) краевая задача (2.4)–(2.5) не имеет кратных собственных значений. Допустим, что μ_0 есть кратное собственное значение (2.4)–(2.5), тогда имеют место равенства:

$$\begin{cases} \Delta(\sqrt{\mu_0}) = \sqrt{\mu_0} + a\sin\sqrt{\mu_0} = 0 \\ \Delta(\sqrt{\mu_0}) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mu_0}}(1 + a\cos\sqrt{\mu_0}) = 0 \end{cases}.$$

Из которых следует, что

$$\sin^2\sqrt{\mu_0}+\cos^2\sqrt{\mu_0}=\frac{\mu_0+1}{a^2}=1,\quad \mu_0=a^2-1;$$

$$tg\sqrt{\mu_0}=\sqrt{\mu_0}\quad\Rightarrow\quad tg\sqrt{a^2-1}=tg\sqrt{a^2-1},$$

что противоречит нашему предположению (2.6).

Лемма 2.2. Если система функций $\{\upsilon_m(t)\}$, $m = 1,2,...$ полна в пространстве $L^2(0,1)$, а система функций $\{u_n(x)\}$, $n = 1,2,...$ образует ортонормированный базис пространства $L^2(0,1)$, то система функций $w_{mn}(t,x)=\upsilon_m(t)u_n(x)$, $m, n = 1,2,...$ образует полную систему в пространстве $L^2(\Omega)$, где $\Omega=[0,1]\times[0,1]$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой функции f из пространства $L^2(\Omega)$ имеет место равенство

$$(f,w_{mn})=\int_0^1\int_0^1 f(t,x)w_{mn}(t,x)dtdx=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f(t,x)\upsilon_m(t)u_n(x)dtdx=0.$$

Тогда в силу теоремы Фубини имеем

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(t,x)u_n(x)dx\right]\upsilon_m(t)dt=0,\ m=1,2,...$$

В силу полноты системы $\{\upsilon_m(t)\}$, $m = 1,2,...$, отсюда выводим, что для любого $n = 1,2,...$ имеет место равенство

$$\int_0^1 f(t,x)u_n(x)dx=0,\quad n=1,2,...$$

Тогда в силу теоремы Парсеваля при каждом фиксированном значении переменной t имеет место равенство

$$\int_0^1|f(t,x)|^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 f(t,x)u_n(x)dx\right|^2=0,$$

т.е.

$$\int_0^1|f(t,x)|^2dx=0.$$

Проинтегрировав обе части этой формулы по переменной t, получим

$$\int_0^1\int_0^1|f(t,x)|^2dxdt=0,$$

следовательно, почти всюду в области Ω имеет место равенство $f(t,x) = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.3. Если a – произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию

$$tg\sqrt{a^2-1}\neq\sqrt{a^2-1},\qquad(2.6)$$

то система собственных функций краевой задачи

$$\overset{\circ}{\upsilon}(t)+a\upsilon(1-t)=\mu\upsilon(t),\qquad(2.7)$$

$$\upsilon(0)=0\qquad(2.8)$$

полна в пространстве $L^2(0,1)$.

3. Основные результаты.

Теорема 3.1. Если a – произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию

$$tg\sqrt{a^2-1}\neq\sqrt{a^2-1},\qquad(2.6)$$

то система собственных функций краевой задачи

$$Tu=u_t-u_{xx}+au(1-t,x)=\lambda u(t,x),\qquad(3.1)$$

$$u|_{t=0}=0,\qquad(3.2)$$

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=0\qquad(3.3)$$

полна в пространстве $L^2(\Omega)$, где $\Omega=[0,1]\times[0,1]$.

Доказательство. Собственных функций краевой задачи (3.1)-(3.3) ищем в виде

$$u(t,x)=\upsilon(t)\sin\pi x.$$

Подставив это выражение в уравнение (3.1), имеем

$$\overset{\circ}{\upsilon}(t)\sin\pi x+(n\pi)^2\upsilon(t)\sin\pi x+a\upsilon(1-t)\sin\pi x=$$

$$=\lambda\upsilon(t)-\sin\pi x,$$

$$\overset{\circ}{\upsilon}(t)+(n\pi)^2\upsilon(t)+a\upsilon(1-t)=\lambda\upsilon(t),$$

$$\overset{\circ}{\upsilon}(t)+a\upsilon(1-t)=\left[\lambda-(n\pi)^2\right]\upsilon(t),$$

$$\upsilon(0)=0.$$

При каждом фиксированном значении n эта краевая задача имеет полную систему собственных функций. Для собственных значений λ имеет место формула

$$\lambda - (n\pi)^2 = -a\cos\nu,$$

$$\Rightarrow \lambda = (n\pi)^2 - a\cos\nu,$$

$$\Rightarrow \lambda_{mn} = (n\pi)^2 - a\cos\nu_m.$$

Пусть функция $\upsilon(t)$ есть собственная функция краевой задачи (2.4)–(2.5), тогда с точностью до постоянного множителя она имеет вид

$$\upsilon(t) = \sin\nu t,$$

где величины ν есть корень уравнения $\nu + a\sin\nu = 0$, лежащий (для определенности) в правой полуплоскости комплексной плоскости. Поэтому имеют место следующие равенства

$$\overset{\circ}{\upsilon}(t) = \nu\cos\nu t;$$

$$\upsilon(1-t) = \sin\nu(1-t) = \sin\nu\cos\nu t - \cos\nu\sin\nu t,$$

$$\overset{\circ}{\upsilon}(t) + a\upsilon(1-t) = \nu\cos\nu t + a\sin\nu\cos\nu t -$$

$$- a\cos\nu\sin\nu t =$$

$$= \nu\cos\nu t - \nu\cos\nu t - a\cos\nu\sin\nu t =$$

$$= -a\cos\nu\sin\nu t = -a\cos\nu\upsilon(t).$$

Из формулы $\nu + a\sin\nu = 0$ имеем $\sin\nu = -\frac{\nu}{a}$, $\cos\nu = \pm\sqrt{1-\sin^2\nu} = \pm\sqrt{1-\frac{\nu^2}{a^2}}$, $-\cos\nu = \mp\sqrt{a^2-\nu^2}$. Следовательно, имеет место равенство

$$\overset{\circ}{\upsilon}(t) + a\upsilon(1-t) = \mp\sqrt{a^2-\nu^2}\,\upsilon(t),$$

$$\upsilon(0) = 0$$

говорящие о том, что собственные функций краевой задачи (2.4)–(2.6) являются собственными функциями также и краевой задачи (2.7)–(2.8). Тогда утверждение теоремы следует из леммы 2.1.

Следовательно, имеют место формулы

$$u_{mn}(t,x) = \upsilon_m(t)\sin n\pi x,$$

$$\overset{\circ}{u}_{mn}(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{mn}(t,x) + au_{mn}(1-t,x) =$$

$$= \lambda_{mn}u_{mn}(t,x),$$

$$u_{mn}\big|_{t=0} = 0,$$

$$u_{mn}\big|_{x=0} = 0,\ u_{mn}\big|_{x=1} = 0,$$

$$\lambda_{mn} = (n\pi)^2 - a\cos\nu_m,\ \nu_m + a\sin\nu_m = 0.$$

Система $\{\sin n\pi x\}$, $n = 1,2,...$ образует полную и ортогональную систему в пространстве $L^2(0,1)$. Полнота системы $\{\upsilon_m(t)\}$ следует из леммы 2.3, тогда из леммы 2.2 следует полнота системы $\{u_{mn}(t,x)\}$, $m,n = 1, 2, ...$ в пространстве $L^2(\Omega)$.

Теорема доказана.

В заключение хочу поблагодарить академика НАН РК Т. Ш. Кальменова за постановку задачи и к. ф.-м. н. А. Ш. Шалданбаева за помощь, оказанную при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

2. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения волтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 10. 2004. С. 3-163.

3. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968.

4. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

5. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев; Наука Думка, 1977.

6. *Дженалиев М.Т.* Об одной краевой задачи для линейного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1925-1927.

7. *Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш.* К спектральной теории уравнения с отклоняющимся аргументами // Математический журнал. Алматы, 2004. Т. 4, № 3(13). С. 41-48.

Резюме

Өзіндік вектордың толық жүйесі бар дискреттік оператордан вольтерлік оператордың жылуөткізгіштігінің оқшауланбауы алғаш рет көрсетіліп отыр, яғни кез келген жылуөткізгіш оператордың қасынан өзіндік вектордың толық жүйесі бар дискреттік операторды табуға болады.

Summary

In a given article the non-isolation of volterr operator of thermal conductivity from discrete operators with full system of own vectors is shown, in other words, in any small vicinity of the thermal conductivity operator the discrete operators with full system of own vectors are found.

УДК 517.9

Поступила 12.10.10г.