МАТЕМАТИКА

Б. РЫСБАЙУЛЫ, А.Т. БАЙМАНКУЛОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРЯМОЙ И СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ПОЧВЕННОЙ ВОДЫ

(Представлена академиком НАН РК Ж.Ж. Байгунчековым)

1. Постановка задачи.

В работе изучается система атмосфера- ненасыщенная зона- грунтовая вода. Движение воды в системе имеет непрерывный характер. Теория движения воды в почве при изотермических условиях для ненабухающих и недеформирующихся грунтов основано на закон Букингема /1/, которое выражает связь между потоком и градиентом потенциала переноса. Аналитическая запись закона Букингема записано в виде $q = -D\dfrac{\partial W}{\partial z} - K$ Ричардсоном /2/ и Чайлосом /3/.

Здесь – коэффициент диффузии влаги, q – удельный поток воды, K – коэффициент гидравлической проводимости почвы, W – влажность грунта. Уравнение неразрывности для ненасыщенного потока можно представит в виде /4/

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

В начальный момент распределение влаги задается. То есть

$$W(z,0) = W_0(z)$$

На границе поверхности почвы и атмосферы задается граничное условие второго рода

$$\frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = A(t)$$

На границе грунтовых вод с почвой задается первое граничное условие

$$W(0,t) = W_1 = const$$

Чтобы решить обратную задачу, т.е. найти например $D(z)$ мы должны ставить дополнительное условие. В нашем случае это влага на поверхности почвы

$$W(H - \Delta z, t) = W_g(t),\ t \in [0,T].$$

Введем новую функцию

$$W(z,t) = \overline{W}(z,t) - W_1 - zA(t). \qquad (2)$$

Легко проверить, что

$$\overline{W}(0,t) = 0 \text{ и } \frac{\partial \overline{W}(H,t)}{\partial z} = 0$$

Из (2) следует равенства

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial \overline{W}(z,t)}{\partial z} - A(t)$$

Найденные производные подставляем в (1). Функцию $\overline{W}(z,t)$ снова обозначим через $W(z,t)$. Тогда получится следующая задача

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right) - A(t)\frac{\partial D(z)}{\partial z} + zA'(t) \qquad (3)$$

$$W(0,t) = 0,\ \frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = 0,$$

$$W(z,0) = W_0(z) + W_1 + zA(0) \qquad (4)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$f(z,t) = zA'(t)$ и величину $W_0(z) + W_1 + zA(0)$ обозначим снова через $W_0(z)$.

Задача (3)-(4) в области $Q = (0,H)\times(0,T)$ при заданном $D(z)$ имеет единственное устойчивое решение /5/. Методика решения обратной задачи кондуктивного распространения температуры разработана в работах /6, 7/, а общая схема определения коэффициента диффузии на дифференциальном уровне изучена в работе /8/. В настоящей работе доказываются устойчивость разностных схем прямой и сопряженной задачи, построенные при определении коэффициента диффузии $D(z)$.

2. Разностные задачи.

В дискретной области

$$Q_N^m = \left\{z_i = i\cdot\Delta z,\ \mathrm{t_j} = j\cdot\Delta t \middle| N\cdot\Delta z = H;\ \mathrm{m}\cdot\Delta\mathrm{t} = \mathrm{T}\right\}$$

ищется решение задачи

$$Y_{\bar{t}}^{j+1} = \left(D(z_{i-1})Y_{\bar{z}}^{j+1}\right)_z + A^{j+1}D_{i;} + \varphi_i^{j+1},$$

$$i = 1,2,\ldots,N;\ \mathrm{j} = 0,1,\ldots,\mathrm{m}-1. \qquad (5)$$

$$Y_0^j = 0,\ Y_{N,\bar{z}}^j = 0,\ Y_i^0 = W_0(z_i) \qquad (6)$$

В работе /9/ из (6)-(7) получена сопряженная задача

$$U_{\bar{t}}^{j+1} + \left(D_n(z_{i+1})U_{i,z}^j\right)_{\bar{z}} = 0 \qquad (7)$$

$$U_i^m = 0,\ U_0^j = 0,$$

$$D_n(z_{N-1})U_{N,\bar{z}}^j = 2\left(Y_N^{j+1} - U_g(t_{j=1})\right) \qquad (8)$$

3. Априорные оценки.

Умножим (5) на $2Y_i^{j+1}\Delta z\Delta t$ и суммируем по всем узлам сетки

$$Q_N^m = \left\{z_i = i\cdot\Delta z,\ \mathrm{t_j} = j\cdot\Delta t \middle| N\cdot\Delta z = H;\ \mathrm{m}\cdot\Delta\mathrm{t} = \mathrm{T}\right\}.$$

После применения формулы суммирования по частям получим

$$\|Y\|_{\bar{t}}^2 + 2\sum_j \left\|\sqrt{D_{i-1}}Y_{\bar{z}}\right\|^2 \Delta t \le -2\sum_{i,j} A(t)D_iY_{i,z}h\Delta t +$$

$$+ 2\sum_{i,j}\varphi_i^{j+1}Y_i^{j+1}\Delta z\Delta t + \|W_0\|^2.$$

Применяя ε – неравенство Коши выводим, что

$$\|Y\|_{\bar{t}}^2 + \sum_j \left\|\sqrt{D}Y_{\bar{x}}\right\|^2 \Delta t \le \sum_i D(z_i)\Delta z +$$

$$+ \sum_{i,j} f^2\Delta t\Delta z + \sum_j \|Y\|^2\Delta t + \|W_0\|^2.$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла получим

$$\|Y\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{D}Y_{\bar{x}}\right\|^2 \Delta t \le C_1 + \sum_i D(z_i)\Delta z \qquad (9)$$

где

$$C_1 = \|W_0\|^2 + \sum_{i,j}\varphi^2(z_i,t_j)\Delta z\Delta t.$$

Б) Берем разностную производную по t от (5) и умножим на $2Y_{\bar{t}}\Delta z\Delta t$ и суммируем по i от 1 до $N-1$, а по j от 1 до произвольного j. Тогда

$$\|Y_{\bar{t}}\|^2 + 2\sum_j \left\|\sqrt{D_{i-1}}Y_{\bar{t}\bar{x}}\right\|^2 \Delta t \le -\sum_{i,j} A_{\bar{t}}D(z_i)Y_{\bar{t}\bar{z}}\Delta h\Delta t +$$

$$+ 2\sum_{i,j}\varphi_{\bar{t}}(z,t)Y_{\bar{t}}^{j+1}\Delta h\Delta t + \left\|W_0^1\right\|^2.$$

Применяя ε– неравенство Коши и разностный аналог леммы Гронуолла получим

$$\|Y_{\bar{t}}\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{D_{i-1}}Y_{\bar{z}\bar{t}}\right\|^2 \Delta t \le C_2 + \sum_i D(z_i)\Delta z \quad (10)$$

4. Доказательство ограниченности сверху величины $\sum_i D(z_i)\Delta z$

В работе /4/ отмечается, что на верхней границе почвы капиллярно-сорбционный потенциал принимает постоянное значение. Ввиду того, что

$$D(z) = k\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$$

Получается, что $D(H)=0$. Т.е. на границе почвы с атмосферой, коэффициент капиллярной диффузии будет равен нулю. Учитывая этот факт суммируем систему (5) от произвольного i до $N-1$. Тогда

$$\sum_i Y_{i,\bar{t}}^{j+1}\Delta z = D(z_{i-1})Y_{i\bar{z}}^{j+1} + AD(z_i) + \sum_i \varphi(z_i,t)\Delta z$$

Умножаем его на Δt и суммируем по j. Из практического смысла начальных данных следует, что $0 < A_0 < \sum_j \left|A^j\right|\Delta t < \infty$. Поэтому

$$A_0D(z_i) \le \sum_i \left|f(z_i,t)\right|\Delta z\Delta t + \sum_{i=1}^{N-1}\left|Y_i^{j+1} -\right.$$

$$\left. - Y_i^0\right|\Delta z + \sum_j D_n(z_i)\left|Y_{i\bar{x}}^{j+1}\right|\Delta t.$$

Еще раз умножая на Δz и суммируя по i получаем

$$A_0T\sum_i D_n(z_i)\Delta z \le H\sum_{i,j}\left|\varphi(z,t)\right|\Delta z\Delta h +$$

$$+ H\|Y\|^2 + \sum_i D_i\Delta z + C_3$$

или

$$\left(A_0T - 1\right)\sum_i D_n(z_i)\Delta z \le C_4.$$

Время расчета T должно быть такой, чтобы $A_0T - 1 > 1$. Тогда

$$\sum_i D_n(z_i)\Delta z \le C_4. \qquad (11)$$

Неравенство $A_0T > 2$ означает, что для определения коэффициента капиллярной диффузии мы должны наблюдать изучаемый участок почвы достаточно продолжительное время. Только в таком случае мы получим достоверный результат.

На основе полученной оценки из (11) выводится оценка

$$\|Y\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{D}Y_{\bar{x}}\right\|^2 \Delta t \le C_5\ .$$

Доказано

Теорема 1. Если $f(z,t) \in L_2(Q)$, $W_0(z) \in L_2(0,H)$, то для решения задачи (5)-(6) справедлива оценка

$$\max\|Y\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{D}Y_{\bar{x}}\right\|_j^2 \Delta t + \sum_i D(z_i) \le C_5 < \infty,$$

А если $f(z,t) \in L_2(0,H;W_2^1(0,T))$, $W_0(z) \in W_2^1(0,H)$, то для решения задачи (5)-(6) справедливо оценки

$$\max_j\|Y_{\bar{t}}\|^2 + \sum_J \left\|\sqrt{D}Y_{z\bar{t}}\right\|^2 + \sum D(z_i)\Delta z \le C_6 < \infty$$

Аналогично доказывается

Теорема 2. Если $f(z,t) \in L_2(0,H;W_2^1(0,T))$, $W_0(z) \in L_2(0,H)$, $W_g(t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (7)-(8) справедливо оценка

$$\max_j\|U\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{D}U_{\bar{z}}\right\|_j^2 \Delta t \le C_7 < \infty,$$

а если

$f(z,t) \in W_2^1(0,H;W_2^2(0,T))$, $W_0(z) \in W_2^1(0,H)$, $W_g(t) \in W_2^1(0,T)$, то для решения задачи (7)-(8) справедливо оценки

$$\max_J\|U_{\bar{t}}\|^2 + \sum_J \left\|\sqrt{D}U_{z\bar{t}}\right\|^2 \le C_8 < \infty$$

На основе теоремы 1 и 2 доказывается

Теорема 3. Если $f(z,t) \in L_2(0,H;W_2^1(0,T))$, $W_0(z) \in L_2(0,H)$, $W_g(t) \in L_2(0,T)$, то решения задачи (5)-(6) и (7)-(8) являются устойчивой относительно величин $A(t)$, $W_0(z)$ и $W_g(t)$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buckingham E.* Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington), 1907, Bull. 38.

2. *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through medians. – Physics, 1931, vol, 1, p.318-333.

3. *Childs E.D.* The transport of water through heavy clay soils. I, III. – j.Ag. Sci., 1936, vol. 26.

4. *Нерпин С.В., Юзефович Г.И.* О расчете нестационарного движения влаги в почве// Докл. ВАСХНИЛ, №6, 1966.

5. *Тиханов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1996, 724 с.

6. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.

7. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О.* Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний// Вестник НАН РК. 2008. -№2. - С. 7-9.

8. *Байманкулов А.Т.* Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде.// Известия НАН РК, 2008, № 3, с.45-47.

9. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т.* Итерационный метод для определения коэффициента диффузии почвенной воды (в печати).

Резюме

Қанықпаған топырақтағы ылғалдың қозғалысы қарастырылады. Жер бетіндегі ылғал беріледі. Топырақ суының диффузия коэффициентін анықтауда тура және түйіндес айырымдық сұлбалар алынады. Осы сұлбалардың орнықтылығы дәлелденеді.

Summary

Moisture movement in a no saturated ground was stud. The moisture on an earth surface is set. To define factor of diffusion of soil water are made direct and interfaced difference problems. Stability received difference problems is proved.

Поступила 24.04.09 г.