УДК 519.62:624.131

Б. РЫСБАЙУЛЫ, З.Б. БИРТАЕВА

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО ГРУНТА С УЧЕТОМ КОНВЕКЦИИ ВЛАГИ

(Представлена академиком НАН РК Ж.Ж. Байгунчековым)

В работе изучается обратная задача процесса распространения тепла в однородной среде. Используя температуры и влаги грунта на поверхности земли, определяется коэффициент теплопроводности грунта методом сеток.

1. Постановка задачи Конвективный перенос тепла в грунте осуществляется водой или воздухом. Передвижение влаги может осуществляться в грунте или в результате фильтрации (т. е. под воздействием гравитационных сил), или в результате миграции (т. е. под воздействием «внутренних» сил, возникающих в самом грунте на поверхностях раздела вода — минеральный скелет), или тем и другим путем одновременно. Мартынов Г.А., Глобус А.М. /1,2/ и другие ученые доказали, что механизм движения в обоих случаях совершенно одинаков, хотя силы, вызывающие его, различны. В работе /3-5/ изучены математические свойства разностных схем для однородного грунта, а в работе /6/ изучается метод определения коэффициента теплопроводности однородного грунта с учетом конвекций влаги. В области $Q=(0,H)\times(0,T)$ рассматривается конвективное распространение тепла. Уравнение движение тепла записывается в следующем виде:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

Для уравнений (1) ставятся следующие начально-граничные условия

$$\theta\big|_{z=0}=T_1, \qquad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}=-\alpha\left(\theta\big|_{z=H}-T_b(t)\right),$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(z) \qquad (2)$$

Кроме того, при переходе от одного слоя к другому слою ставятся условия

$$\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=h_k}=0,\ \ [\theta]_{z=h_k}=0,\quad k=1,2,\ldots \qquad (3)$$

Уравнение движение влаги записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \qquad (4)$$

Уравнение влаги (2) решается при следующих условиях

$$\omega\big|_{z=0} = \omega_1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z}\bigg|_{z=H} = A(t), \quad \omega\big|_{t=0} = \omega_0(z) \tag{5}$$

Кроме того, при переходе от одного слоя к другому ставятся условия

$$\left[D\frac{\partial \omega}{\partial z} + D\mu\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{z=h_k} = 0, \quad [\omega]_{z=h_k} = 0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{6}$$

Здесь $z = h_k$, $k = 1,2,\ldots$ – координаты точки перехода. Для того чтобы определить коэффициент теплопроводности, задаются условия

$$\theta\big|_{z=H} = T_q(t), \qquad \omega\big|_{z=H} = \omega_q(t) \tag{7}$$

Задается начальное значение $\lambda_n(z)$, следующее значение коэффициента теплопроводности $\lambda_{n+1}(z)$ определяется так по формуле /7/:

$$\lambda_{n+1}(z) - \lambda_n(z) = -\beta_n(z)B_n(z). \tag{8}$$

Здесь

$$B_n(z) = \int_0^T \frac{\alpha D\mu}{\lambda_n^2}\left(\theta^n - T_b\right)_{z=H} u\,dt - \int_0^T \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}dt. \tag{9}$$

А также получены следующие сопряженные задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{10}$$

$$u(0,t) = 0, \quad D\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 2A_0\left(\omega - \omega_q(t)\right)\Big|_{z=H}, \quad u(z,T) = 0; \quad [u]_{h_k} = 0, \quad \left[D\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{h_k} = 0, \tag{11}$$

$$\gamma_0 c\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0; \tag{12}$$

$$\psi[0,t] = 0, \quad \psi(z,T) = 0, \quad \left(\lambda_n\frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha\psi + D\mu\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\alpha D\mu}{\lambda_n}u\right)\bigg|_{z=H} = 2\left(\theta - T_q(t)\right)\Big|_{z=H}; \tag{13}$$

$$[\psi]_{h_k} = 0, \quad \left[\lambda_n\frac{\partial \psi}{\partial z} + D\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{h_k} = 0, \quad k = 1,2. \tag{14}$$

В настоящей работе минимизируется функционал .

2. Априорные оценки

1) Умножим (1) на $\theta(z,t)$и интегрируем по области $Q_t = (0,H)\times(0,t)$. Интегрируем по частям правый часть знака равенства по переменной z. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^H \gamma_0 c\int_0^t \frac{\partial \theta^2}{\partial \tau}d\tau = \int_0^t \left(\theta\lambda_n\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}^{z=H} d\tau - \int_0^t \left[\theta\lambda_n\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{h_1} d\tau - \int_0^t \left[\theta\lambda_n\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{h_2} d\tau - \int_0^t d\tau\int_0^H \lambda_n\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 dz.$$

Учитывая условия (2) и (3), выводим

$$\frac{1}{2}\int_0^H \gamma_0 c\theta^2(z,t)dz + \int_0^t\int_0^H \lambda_n\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 dz d\tau + \alpha\int_0^t \theta^2(H,\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^H \gamma_0 c\theta_0^2(z)dz + \alpha\int_0^t \theta(H,\tau)T_b(\tau)d\tau.$$

Применяя неравенства Коши, получаем

Лемму 1. Если $\theta_0(z) \in L_2(0,H)$, $\quad T_b(t) \in L_2(0,T)$, то для решения прямой задачи (1), (3) справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\int_0^H \gamma_0 c\theta^2(z,t)dz + \int_0^t\int_0^H \lambda_n\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 dzd\tau + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \theta^2(H,\tau)d\tau \le C_1 .$$

2) Для того чтобы получить оценку для влаги ω, умножим (4) на $\omega(z,t)$ и интегрируем по всем внутренним точкам области $Q_t = (0,H)\times(0,t)$, и интегрируем по частям правую часть знака равенства. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^H dz\int_0^t \frac{\partial\omega^2}{\partial\tau}d\tau = \int_0^t (R\omega)\Big|_{z=0}^{z=H} d\tau - \int_0^t (R\omega)\Big|_{h_1-0}^{h_1+0} d\tau - \int_0^t (R\omega)\Big|_{h_2-0}^{h_2+0} d\tau - \int_0^H dz\int_0^t R\frac{\partial\omega}{\partial z}d\tau ,$$

где $R = D\dfrac{\partial\omega}{\partial z} + D\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$.

Учитывая условия (5), (6) и применяя неравенство Коши, потом ε – неравенство Коши при $\varepsilon_1 = 1$, получим:

$$\frac{1}{2}\int_0^H \omega^2 dz + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^H D\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 d\tau dz \le \frac{1}{2}\int_0^H \omega_0^2(z)dz + \varepsilon\int_0^t \omega^2(H,\tau)d\tau + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t A^2(\tau)d\tau +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha D\mu}{\lambda_n}\right)^2\int_0^t \theta^2(H,\tau)d\tau + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha D\mu}{\lambda_n}\right)^2\int_0^t T_b^2(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\frac{D\mu^2}{\lambda_{n,\min}}\int_0^H\int_0^t \lambda_n D\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 dzdt.$$

Используя лемму 1, выводится неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^H \omega^2 dz + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^H k\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 d\tau dz \le \varepsilon\int_0^t \omega^2(H,\tau)d\tau + \frac{1}{\varepsilon}C_2\left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}^2}\right) \tag{15}$$

Используя очевидное тождество

$$\omega^2(H,t) = \int_0^H \frac{\partial\omega^2}{\partial z}dz = 2\int_0^H \omega\frac{\partial\omega}{\partial z}$$

выводится неравенство

$$\int_0^t \omega^2(H,\tau)d\tau \le \frac{1}{4}\int_0^H\int_0^t D\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 dzd\tau + \frac{4}{D}\int_0^H\int_0^t \omega^2(z,t)dzd\tau .$$

Неравенство (15) усиливается после применения последнего неравенства, и положим $\varepsilon = 1$. Тогда получится неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^H \omega^2 dz + \frac{1}{4}\int_0^t\int_0^H D\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 dzd\tau \le \frac{4}{D}\int_0^t\int_0^H \omega^2(z,t)dzd\tau + C_2\left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}^2}\right).$$

Применяя лемму Гронуолла, выводим

Лемму 2. Если $\omega_0(z), \theta_0(z) \in L_2(0,H), T_b(t), A(t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (4)-(6) справедлива оценка

$$\int_0^t \omega^2(H,\tau)d\tau + \max_t\int_0^H \omega^2 dz + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^H D\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 dzd\tau \le C_3\left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}^2}\right).$$

Аналогично доказываются следующие утверждения:

Лемма 3. Если $\omega_0(z), \theta_0(z) \in L_2(0,H), T_b(t), A(t), \omega_q(t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (10) – (11) имеет место оценка

$$\max \int_0^H u^2 dz + \int_t^T u^2(H,\tau)d\tau +$$

$$+\int_t^T\int_0^H D\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dzd\tau \le C_4\left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}^2}\right).$$

Лемма 4. Если $\theta_0(z), \omega_0(z) \in L_2(0,H)$, $T_q(t)$, $\omega_q, T_b(t), A(t), (t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (12) – (14) справедлива оценка

$$\alpha\int_0^H \gamma_0 c\psi^2 dz + \alpha\int_t^T\int_0^H \lambda_n\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 dzd\tau +$$

$$+\alpha\int_t^T \psi^2(H,\tau)d\tau \le C_5\left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}^2}\right)^2.$$

3. Ограниченность коэффициента теплопроводности

Обращаемся к равенству (8):

$$\lambda_{n+1}(z) - \lambda_n(z) = -\beta_n(z)B_n(z).$$

Введем обозначения $h_0 = 0, h_3 = H$. В каждом подслое (h_k, h_{k+1}) функция $\lambda_n(z)$ является постоянной. Обозначим $\lambda_n(z) = \lambda_n(z_k), k = 0,1,2.$ т.е. $\lambda_n(z)$ – кусочно-постоянная функция. Интегрируя равенство

$$\lambda_{n+1}(z) - \lambda_n(z) = -\beta_n(z)B_n(z)$$

по z от h_k до h_{k+1}, имеем равенство

$$(\lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_n(h_k))(h_{k+1} - h_k) = -\beta_n(h_k)\int_{h_k}^{h_{k+1}} B_n(z)dz$$

или

$$\lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_n(h_k) = -\frac{\beta_n(h_k)}{h_{k+1} - h_k}\int_{h_k}^{h_{k+1}} B_n(z)dz, \quad k = 0,1,2.$$

Последние равенства суммируются по n от 0 до произвольного n. Тогда

$$\lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_0(h_k) = -\frac{1}{h_{k+1} - h_k}\sum_n \beta_n(h_k)\int_{h_k}^{h_{k+1}} B_n(z)dz.$$

Оцениваем левую часть знака равенства по модулю, сверху

$$|\lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_0(h_k)| \le \frac{1}{h_{k+1} - h_k}\sum_n \beta_n(h_k)\int_{h_k}^{h_{k+1}} |B_n(z)|dz.$$

Принимая во внимание формулу (9) и используя доказанные леммы 1-4, выводим, что

$$|\lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_0(h_k)| \le C_6\sum_n \beta_n(h_k)f(\lambda_{\min}, \lambda(h_k)).$$

Здесь $f(\lambda_{\min}, \lambda(h_k)) = \left(1+\frac{1}{\lambda_{\min}^2}\right)\frac{1}{\lambda(h_k)} + \sqrt{1+\frac{1}{\lambda_{\min}^2}}$.

Функция $\beta_n(h_k)$ выбирается из равенства

$$\beta_n(h_k)f(\lambda_{\min}, \lambda(h_k)) = \frac{\beta_k}{n^{\alpha_0}}, \ \alpha_0 > 1$$

Тогда

$$|\lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_0(h_k)| \le C_7\beta_k, \quad k = 0,1,2,$$

где β_k – достаточно малое число. Если $\lambda_0(h_k) - C_7\beta_k \ge C_8 > 0$, то имеют место неравенство

$$0 < C_8 \le \lambda_{n+1}(h_k) \le C_9 < \infty, \quad k = 0,1,2,$$

Полученное утверждение записывается в виде

Теорема. Если имеет место леммы 1-4, то существует достаточно малое число β_k, такое, что из (8) вытекает неравенство

$$0 < C_{13} \le \lambda_{n+1}(h_k) \le C_{14} < \infty, \quad k = 0,1,2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокриологии (мерзлотоведения). М.: 1959, под. ред. Н.А. Цытович. гл. VI. С. 153-192.

2. *Глобус А.М.* Физика неизотермического внутрипочвенного влагообмена. Л., Гидрометиздат, 1983, 279 с.

3. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.

4. *Рысбайулы Б., Махамбетова Г.И.* Обратная задача распространения температуры в неоднородном грунте. // Алматы, Вестник КБТУ №4(7), 2008, 75-78.

5. *Жумагулов Б.Т., Рысбайулы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

6. *Рысбайулы Б., Биртаева З.Б.* Итерационный метод определения коэффициента теплопроводности с учетом конвекции влаги в однородной среде// Вестник КБТУ, 2009.

7. *Рысбайулы Б., Биртаева З.Б.* Определение коэффициента теплопроводности многослойного грунта с учетом конвекции влаги// Вестник КБТУ, 2010 (в печати).

Резюме

Жұмыста біртекті ортамен жылу таралуы процесінің кері есебі қарастырылады. Жер бетінде берілген топырақ температурасы мен ылғалдылығын пайдалана отырып топырақтың жылуөткізгіштік коэффициенті шаршы тәсілмен анықталды.

Summary

This work studies the inverse problem of the propagation of heat in a homogeneous medium. Using temperature and soil moisture on the surface of the land is determined by the thermal conductivity of soils by the method of nets.

Поступила 5.05.2010 г.