Б. РЫСБАЙУЛЫ[1], *А. Т. БАЙМАНКУЛОВ*[2]

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВЛАГОПРОВОДНОСТИ ПОЧВЫ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

(Представлена академиком НАН РК Ж. Ж. Байгунчековым)

Изучается движение влаги и температуры в ненасыщенном грунте. Задаются влага и температура на поверхности земли. Выводится итерационная формула, с помощью которой определяется коэффициент влагопроводности почвенной воды.

1. Постановка задачи. Движение воды в капиллярно-пористых средах, к каковым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил, представляющих градиент давления, потенциала гравитационного поля, потенциала электрического поля, температуры, концентрации растворенных веществ [1-4]. С. В. Нерпин [5], проведя классификацию механизмов движения воды в дисперсных средах, предполагает, помимо движущихся сил, различать силы по месту их действия в потоке, когда они распределены внутри объема потока, или вызваны поверхностными силами на границе «жидкость-воздух», или обусловлены силами, возникающими вблизи границы жидкости с твердой стенкой. В итоге он заключает, что почвенная влага движется под действием объемных сил, поверхностные и граничные эффекты здесь не играют роли. Поэтому, принимая это обстоятельство во внимание и решая относительно простую задачу, предполагающую:

1) отсутствие электрического поля;

2) постоянство концентрации рассмотренных веществ;
движение влаги и температуры в области $Q = (0,H)\times(0,T)$ можно описать уравнением [6]:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \quad (1)$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H}+\overline{\alpha}\big(\theta-T_b(t)\big)\big|_{z=H}=0,$$

$$\theta\big|_{z=0}=T_1,\quad \theta\big|_{t=0}=\theta_0(z), \quad (2)$$

где $\overline{\alpha}=\alpha+\alpha_0 D_n(H)$.

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K(z)+D\frac{\partial W}{\partial z}+D\mu\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \quad (3)$$

$$\sigma\big|_{z=H}=A(t),\ \sigma\big|_{z=0}=0,\ W\big|_{t=0}=W_0(z), \quad (4)$$

здесь $\sigma(z,t)=K(z)+D(z)\dfrac{\partial W}{\partial z}+D(z)\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$.

Используя изменение температуры грунта и влаги на поверхности земли $T_g(t)$,$W_g(t)$, требуется определить коэффициент диффузии $D(z)$. Методы решения обратных задач досконально изучены в работах [7-10], а в работах [11-16] изучены различные обратные задачи переноса тепла и влаги.

2. Разностная задача. Отрезок $(0,H)$ разбиваем на N равных частей с шагом $\Delta z=\dfrac{T}{N}$; а отрезок $(0,T)$ разбиваем на m равных частей с шагом $\Delta t=\dfrac{T}{m}$. В полученной дискретной области

$$Q_N^m=\{\ z_i=i\cdot\Delta z,\quad t_i=j\cdot\Delta t;\quad i=1,2,...,\ N-1,\quad j=0,1,...,\quad m-1\ \}$$

изучается задача

$$\gamma_0 cY_{i,\bar t}^{j+1}=\left(\lambda Y_{iz}^{j+1}\right)_{\bar z},$$

$$i=1,2,...,\quad N-1,\quad j=0,1,...,\quad m-1; \quad (5)$$

$$Y_i^0=\theta_0(z_i),\ Y_0^{j+1}=0,$$

$$\lambda Y_{N\bar z}^{j+1}+(\alpha+\alpha_0 D_n)\cdot\left(Y_N^{j+1}-T_e^{j+1}\right)=0; \quad (6)$$

$$W_{i,\bar t}^{J+1}=\left(K(z_i)+D_n(z_i)P_{iz}^{J+1}+D_n(z_i)\mu Y_{iz}^{J+1}\right)_{\bar z}; \quad (7)$$

$$\sigma_{N-1}=A^{j+1},\ \sigma_0=0,\ P_i^0=W_0(z_i), \quad (8)$$

где

$$\sigma_i=K(z_i)+D_n(z_i)P_{iz}^{J+1}+D_n(z_i)\mu Y_{iz}^{J+1}.$$

Используя температуры и влажности грунта $T_g(t)$, $W_g(t)$ на поверхности земли требуется определить коэффициент влагопроводимости $D(z)$.

3. Сопряженные задачи. Задается начальное приближение коэффициента влагопроводимости $D_n(z_i)$, соответствующее решение системы (5)–(8) обозначим через ($Y_i^{n,j+1}$, $P_i^{n,j+1}$). Следующее приближение коэффициента влагопроводимости обозначим через $D_{n+1}(z_i)$, а соответствующее решение изучаемой системы (5)–(8) обозначим через ($Y_i^{n+1,j+1}$, $P_i^{n+1,j+1}$). Тогда для разности

$$\Delta Y_i^{j+1}=Y_i^{n+1,j+1}-Y_i^{n,j+1},$$

$$\Delta P_i^{j+1}=P_i^{n+1,j+1}-P_i^{n,j+1},$$

$$\Delta D_i=D_{n+1}(z_i)-D_n(z_i)$$

составляется система

$$\gamma_0 c\Delta Y_{it}^{j+1}=\left(\lambda\Delta Y_{iz}^{j+1}\right)_{\bar z}, \quad (9)$$

$$\lambda\Delta Y_{N\bar z}^{j+1}+\overline{\alpha}\Delta Y_N^{j+1}+$$
$$+\alpha_0\Delta D(N-1)\left(Y_N^{n-1}-T_b^{j+1}\right)=0,$$

$$\Delta Y_0^{j+1}=0,\quad \Delta Y_i^0=0; \quad (10)$$

$$\Delta P_{i,t}^{j+1}= \quad (11)$$
$$=\left(D_n\Delta P_{iz}^{j+1}+D_n\mu\Delta Y_{iz}^{j1}+DP_{iz}^{n+1}+\mu\Delta DY_{iz}^{n+1}\right)_{\bar z},$$

$$\Delta\sigma_{N-1}=0,\ \Delta\sigma_0=0,\ \Delta P_i^0=0, \quad (12)$$

здесь

$$\Delta\sigma=D_n\Delta P_{iz}^{j+1}+D_n\mu\Delta Y_{iz}^{j+1}+$$
$$+\Delta D\cdot P_{iz}^{n+1}+\mu\Delta D\cdot Y_{iz}^{n+1}.$$

Из системы (9)-(12), используя методику, разработанную в работе [12], выводятся равенства

$$2\sum_j \Delta Y_N^{j+1}\left(Y_N^{j+1}-T_g^{j+1}\right)\Delta t+$$

$$+2A_0\sum_j P_N^{j+1}\left(W_N^{j+1}-W_g^{j+1}\right)\Delta t=$$

$$=-\sum_j \alpha_0 \Delta D_{n-1}\left(Y_N^{n+1}-T_b^{n+1}\right)X_N^j\Delta t-$$

$$-\sum_{i,j}\Delta D\left(P_{i,\bar z}^{n+1}+\mu Y_{i,\bar z}^{n+1}\right)z_{i,\bar z}^j\Delta t\Delta z \qquad (13)$$

и система сопряженных разностных задач относительно переменных Z_i^j и X_i^j:

$$Z_{i,\bar t}^{j+1}+\left(\mu D_n Z_{iz}^j\right)_{\bar z}=0,\ i=1,2,\ldots,N-1;$$

$$j=0,1,\ldots,m-1,$$

$$Z_i^m=0,\ Z_{1\bar z}^j=0,\ D_n Z_{N,\bar z}^j=2A_0\left(P_N^{j+1}-W_g^{j+1}\right)$$

$$\gamma_0 c X_{i,\bar t}^{j+1}+\left(\lambda X_{iz}^j\right)_{\bar z}+\left(\mu D_n Z_{iz}^j\right)_{\bar z}=0$$

$$X_i^m=0,\ X_0^j=0,$$

$$\bar\alpha X_N^j+\lambda X_{N\bar z}^j+\mu D_n Z_{N,\bar z}^j=2\left(Y_N^{j+1}-T_g^{j+1}\right).$$

4. Итерационный метод. Следующее значение коэффициента влагопроводности $D_{n+1}(z)$ ищется из условия минимизаций функционала

$$J(D)=$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_N^{j+1}-T_g^{j+1}\right)\Delta t+A_0\sum_{j=0}^{m-1}\left(P_N^{j+1}-W_g^{j+1}\right)^2\Delta t.$$

Тогда, используя формулу (13), перепишем его в виде

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=$$

$$=-\sum_j \alpha_0\Delta D_n\left(Y_N^{j+1}-T_g^{j+1}\right)X_N^j\Delta t-$$

$$-\sum_{i,j}\Delta D\left(P_{i,\bar z}^{n+1}+\mu Y_{i,\bar z}^{n+1}\right)Z_{i,\bar z}^j\Delta t\Delta z+$$

$$+\sum_j\left(Y_N^{j+1}\right)^2\Delta t+2A_0\sum_{j=0}\left(\Delta P_N^{j+1}\right)^2\Delta t\,-$$

$$-\sum_{i,j}\Delta D\left(\Delta P_{i,\bar z}^{j+1}+\mu\Delta Y_{i,\bar z}^{j+1}\right)Z_{i,\bar z}^j\Delta t\Delta z-$$

$$-\sum_j \alpha_0\Delta D_{n-1}\Delta Y_N^{j+1}X_N^j\Delta t-$$

Введем обозначение

$$B_n(z_i)=-\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{\alpha_0}{H}\left(Y_N^{j+1}-T_b^{j+1}\right)X_N^j+\right.$$

$$\left.+\left(P_{i,\bar z}^{j+1}+\mu Y_{i,\bar z}^{j+1}\right)z_{i,\bar z}^j\right)\Delta t.$$

Положим, что

$$\Delta D_i=\beta_n(z_i)B_n(z_i),\ i=1,2,\ldots,N. \qquad (14)$$

Тогда, получим формулу:

$$J(D_{n+1})-J(D_n)+\sum_{i=1}^N\beta_n(z_i)B_n^2(z_i)\Delta z=$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\left(\Delta Y_N^{j+1}\right)^2\Delta t+2A_0\sum_{j=0}\left(\Delta P_N^{j+1}\right)^2\Delta t-$$

$$-\sum_j\alpha_0\Delta D_{N-1}\Delta Y_N^{j+1}X_N^j\Delta t-$$

$$-\sum_{i,j}\Delta D\left(\Delta P_{i,\bar z}^{j+1}+\mu\Delta Y_{i,\bar z}^{j+1}\right)Z_{i,\bar z}^j\Delta t\Delta z.$$

Из формулы (14) определяется следующее значение коэффициента диффузий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buckingham E.* Studies on movement of soil moisture // U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington). 1907. Bull. 38.

2. *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through medians // Physics. 1931. V. 1. P. 318-333.

3. *Childs E.D.* The transport of water through heavy clay soils. I, III // J. Ag. Sci. 1936. V. 26.

4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

5. *Нерпин С.В., Юзефович Г.И.* О расчете нестационарного движения влаги в почве // Докл. ВАСХНИЛ. 1966. № 6.

6. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения) / Под ред. Н. А. Цытович. М., 1959. Гл. VI, с. 153-192

7. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.

8. *Кабанихин С.И., Бектемисов М.А., Нурсеитова А.Т.* Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. Алматы-Новосибирск, 2006. 426 с.

9. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009. 457 с.

10. *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. Алматы, 2007. 331 с.

11. *Атанбаев С.А., Кожабекова П.А.* Расчет теплового состояния почв и грунтов по данным нестационарного теплофизического эксперимента // ДАН НАН РК. 2008. № 4. С. 36-39.

12. *Рысбайулы Б.* Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ. 2008. № 1. С. 62-65.

13. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК. 2008. № 1. С. 11-13.

14. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О.* Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний // Вестник НАН РК. 2008. № 2. С. 7-9.

15. *Байманкулов А.Т.* Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде // Вестник НАН РК. 2008. № 2. С. 7-9.

16. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т.* Итерационный метод для определения коэффициента диффузии почвенной воды (в печати).

Резюме

Қаныққпаған топырақтағы ылғал мен температура қозғалысы қарастырылады. Жер бетіндегі ылғал және температура беріледі. Топырақ суының ылғал өткізгіштік коэффициентін анықтайтын итерациялық тәсіл қорытылып шығарылады.

Summary

Is studied moisture and temperature movement in a no saturated ground. The moisture and temperature on an earth surface is set. The iterative formula with the help by which the factor of diffusion of soil water is defined is deduced.

УДК 519.62:624.131

[1]*Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы,*
[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы*

Поступила 5.05.10г.