УДК 539.3

В. Б. РЫСТЫГУЛОВА, Ф. Б. БЕЛИСАРОВА

ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

КазНПУ им. Абая, КазНУ им. аль-Фараби

В работе получено аналитическое решение изгиба тонкой осесимметричной пластины в общем случае с произвольными механическими характеристиками методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассматривается круглая пластина, на который действует равномерно распределенная нормальная нагрузка q_z. Пластина нагрета неравномерно по радиусу и равномерно – по толщине. Контур пластины предполагаем свободно защемленным.

В работе получено аналитическое решение изгиба тонкой осесимметричной пластины в общем случае с произвольными механическими характеристиками [1]:

$$\frac{d}{dr}\left(\nabla^2\Phi\right)=\frac{1}{D_0}\frac{dD_0}{dr}\left(\frac{d^2\Phi}{dr^2}-\frac{\mu}{r^3}\frac{d\Phi}{dr}\right)+\frac{1}{D_0}\frac{dD_0}{dr}(1-\mu)N_T-(1-\mu)\frac{dN_T}{dr}, \tag{1}$$

$$D_2\nabla^2\nabla^2\omega=q_z(r)-\nabla^2M_T-2\frac{dD_2}{dr}\frac{d^3\omega}{dr^3}-\left[\nabla^2D_2+\frac{1}{r}\frac{dD_2}{dr}+\frac{\mu}{r}\frac{dD_2}{dr}\right]\frac{d^2\omega}{dr^2}-\left[\frac{\mu}{r}\frac{d^2D_2}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dD_2}{dr}\right]\frac{d\omega}{dr}, \tag{2}$$

где

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr};$$

$$\nabla^2\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{d^4}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr};$$

$$D_0(r)=\frac{1}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2}E(r,z)dz;$$

$$N_T(r)=\frac{1}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2}E(r,z)\alpha(r,z)T(r,z)dz;$$

$$D_2(r)=\frac{1}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2}E(r,z)z^2dz;$$

$$M_T(r)=\frac{1}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2}E(r,z)\alpha(r,z)T(r,z)\,zdz;$$

Φ – функция напряжения; μ – коэффициент Пуассона; q_z – поперечная нагрузка; ω – прогиб произвольной точки срединной поверхности.

Двум дифференциальным уравнениям третьего, четвертого порядка должны соответствовать семь граничных условий. Однако число условий может быть сокращено, так как сама по себе Ф нас не интересует: достаточно определить ее первую производную по r.

Граничные условия для Ф:

$$\left.\frac{d\Phi}{dr}\right|_{r=0}=0,\quad \left.\frac{1}{r}\cdot\frac{d\Phi}{dr}\right|_{r=R}=0.$$

Граничные условия для ω :

$$\left.\omega\right|_{r=R}=0,\quad -\left.\frac{d\omega}{dr}\right|_{r=R}=0,\quad \left.\frac{d\omega}{dr}\right|_{r=0}=0,$$

$$\left.M_r\right|_{r=R}=D_2\left.\left(\frac{d^2\omega}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{d\omega}{dr}\right)\right|_{r=R}=0.$$

Общий вид решения уравнения (1), (2) методом частичной дискретизации профессора А. Н. Тюреходжаева [2] имеет следующий вид:

$$\theta=\int\Psi(r,r_k)\;e^{\int\alpha(r)dr}dr\cdot\int e^{-\int\alpha(r)dr}dr-\int\Psi(r,r_k)\;e^{\int\alpha(r)dr}\int e^{-\int\alpha(r)dr}drdr+C_1\int e^{-\int\alpha(r)dr}dr+C_2;$$

$$\omega=\iint\int e^{-\int\alpha_2(r)dr}\int\Psi_2(r,r_k)\;e^{\int\alpha_2(r)dr}drdrdrdr+B_1\iint\int e^{-\int\alpha_2(r)dr}drdrdr+B_2\frac{r^2}{2}+B_3r+B_4,$$

где

$$\theta=\frac{d\Phi}{dr},\quad \alpha(r)=\frac{1}{r}-\frac{1}{D_0}\frac{dD_0}{dr},\quad \beta(r)=\frac{\mu}{r^3}\frac{1}{D_0}\frac{dD_0}{dr}-\frac{1}{r^2},$$

$$\Psi(r,r_k)=\frac{1}{D_0}\frac{dD_0}{dr}(1-\mu)N_T-(1-\mu)\frac{dN_T}{dr}-\frac{1}{2}\sum(r_k+r_{k+1})\big[\beta(r_k)\theta(r_k)\delta(r-r_k)-$$

$$-\beta(r_{k+1})\theta(r_{k+1})\delta(r-r_{k+1})\big],$$

$$\alpha_2(r)=2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{D_2}\frac{dD_2}{dr}\right),$$

$$\beta_2(r)=\frac{1}{D_2}\frac{d^2D_2}{dr^2}+\frac{2+\mu}{r}\frac{1}{D_2}\frac{dD_2}{dr}-\frac{1}{r^2},$$

$$\gamma_2(r)=\frac{\mu}{r}\frac{1}{D_2}\frac{d^2D_2}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{1}{D_2}\frac{dD_2}{dr}+\frac{1}{r^3},\quad v=\frac{d\omega}{dr},$$

$$\Psi_2(r,r_k)=\frac{1}{D_2}\left(q_z(r)-\frac{d^2M_T}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dM_T}{dr}\right)-\frac{1}{2}\sum(r_k+r_{k+1})\left[\beta_2(r_k)\frac{dv(r_k)}{dr}\delta(r-r_k)-\right.$$

$$\left.-\beta_2(r_{k+1})\frac{dv(r_{k+1})}{dr}\delta(r-r_{k+1})\right]-\frac{1}{2}\sum(r_k+r_{k+1})\big[\gamma_2(r_k)v(r_k)\delta(r-r_k)-$$

$$-\gamma_2(r_{k+1})v(r_{k+1})\delta(r-r_{k+1})\big].$$

Получено решение для конкретного значения жесткости пластины. Построены кривые изгиба и напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1 Гольденблат И.И. Расчет конструкций на тепловые воздействия. – М.: Машиностроение, 1969. – 600 с.

2 Тюреходжаев А.Н., Рыстыгулова В.Б. Исследование осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки // Журнал научных публикаций «Актуальные проблемы гуманитерных и естественных наук». – М., 2012. – № 2(37). – С. 29-36. – ISSN 2073 – 0071

В. Б. Рыстығұлова, Ф. Б. Белисарова

ПЛАСТИНАНЫҢ ЕРКІН МЕХАНИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ
ЕСКЕРІЛГЕН ДЕФОРМАЦИЯСЫ

Сызықты емес дифференциальдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісімен жұқа механикалық сипаттамалары еркін таңдалған өсі симметриялы пластина иілуінің аналитикалық шешімі жалпы жағдай үшін алынған.

V. B. Rystygulova, F. B. Belisarova

DEFORMATION PLATE
WITH ARBITRARY MECHANICAL CHARACTERISTICS

In the paper received an analytic solution axisymmetric bending of a thin plate in the general case of arbitrary mechanical characteristics by partial discretization of nonlinear differential equations.