УДК 539.3

*В. Б. РЫСТЫГУЛОВА, Ф. Б. БЕЛИСАРОВА*

# ДЕФОРМАЦИЯ СОСТАВНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

КазНПУ им. Абая, КазНУ им. аль-Фараби

*Рассматривается деформация тонкой составной цилиндрической оболочки в неоднородном температурном поле, общий изгиб которой описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами. Решение задачи получено методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений.*

Рассматривается тонкая цилиндрическая оболочка, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость, общий изгиб которой описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами [1] так, что получение аналитического решения, как правило, представляет значительные трудности. В работе получение такого решения достигнуто привлечением метода частичной дискретизации дифференциальных уравнений [2, 3].

Пусть тонкая цилиндрическая оболочка нагружена осесимметричными радиальной нагрузкой и усилиями, приложенными к торцам: изгибающим моментом $M_0$, радиальной перерезывающей $Q$, растягивающей $S_z$ силами при наличии неравномерного по оси и толщине оболочки температурного поля.

Квазистатическое уравнение равновесия рассматриваемой составной оболочки имеют вид:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[D^j(z)\frac{d^2u(z)}{dz^2}\right]+\frac{E^j(z)h}{R^2}u(z)=p^*-\alpha^j\frac{(1+\nu^j)}{h}\frac{d^2f(z)}{dz^2}+\alpha^j\frac{E^j(z)hF(z)}{RD^j(z)}, \qquad (1)$$

где

$u(z)=\sum_{j=1}^{m}u^j(z)\left[H(z-z_j)-H(z-z_{j+1})\right]$ – прогиб в радиальном направлении;

$D^j(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{E_j(z)h^3}{12(1-\nu_j^2)}\left[H(z-z_j)-H(z-z_{j+1})\right]$ – переменная цилиндрическая жесткость;

$E^j(z)=\sum_{j=1}^{m}E_j(z)\left[H(z-z_j)-H(z-z_{j+1})\right]$ – модуль упругости;

$\alpha^j=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\left[H(z-z_j)-H(z-z_{j+1})\right]$ – коэффициент температурного расширения;

$\nu^j=\sum_{j=1}^{m}\nu_j\left[H(z-z_j)-H(z-z_{j+1})\right]$ – коэффициент Пуассона составной оболочки;

$h$ – толщина; $R$ – радиус срединной поверхности оболочки; $f(z)$ – радиальный перепад температур между наружной и внутренней поверхностями; $F(z)$ – средняя температура по толщине оболочки; $p^*=p-\nu S_z/h$; $S_z$ – продольная осевая сила; $p$ – радиальная нагрузка (рис. 1).

Примем следующие законы изменения характеристик в зависимости от $z$

$$E_j(z)=\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z,$$

$$f(z)=b_0+b_1z+b_2z^2,$$

$$F(z)=a_0+a_1z.$$

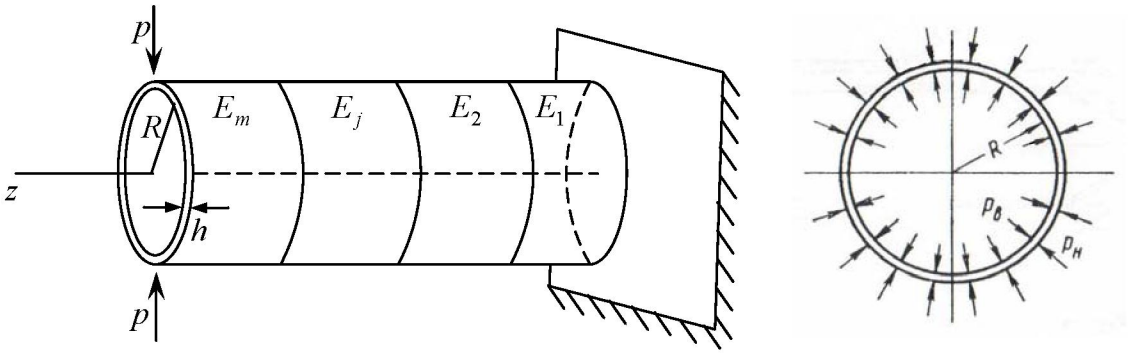


**Рис. 1.** Тонкая цилиндрическая оболочка, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость

Выполнив частичную дискретизацию дифференциального уравнения (1), получим

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[D^j(z)\frac{d^2u(z)}{dz^2}\right]=\sum_{j=1}^{m}\left[p^*-2\alpha_j b_2\frac{1+\nu_j}{h}+12\alpha_j\frac{\left(1-\nu_j^2\right)(a_0+a_1z)}{Rh^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)\delta(z-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})\delta(z-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]\right].$$

Пусть на жестко заделанном и свободном торцах выполняются соответственно следующие граничные условия

$$u(z)=0,\qquad \frac{du(z)}{dz}=0\ \text{при}\ z=0, \tag{2}$$

$$M_z(z)=-D^m(z)\frac{d^2u(z)}{dz^2}=0,\quad Q(z)=-\frac{d}{dz}\left[D^m(z)\frac{d^2u(z)}{dz^2}\right]=0\ \text{при}\ z=l. \tag{3}$$

С учетом граничных условии (2) и (3) решения уравнения (1) будет иметь следующий вид:

$$u(z)=\sum_{j=1}^{m}\left[\left(6p^*\frac{1-\nu_j^2}{h^3}-12\alpha_j b_2\frac{\left(1-\nu_j^2\right)\left(1+\nu_j\right)}{h^4}+72\alpha_j a_0\frac{\left(1-\nu_j^2\right)^2}{Rh^5}\right)\left(\frac{1}{6\varepsilon_{1j}}z^3-\frac{\varepsilon_{0j}}{2\varepsilon_{1j}^2}z^2+\right.\right.$$

$$+\frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3}\left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)+z\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)-\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}-z\right]+24\alpha_j a_1\frac{\left(1-\nu_j^2\right)^2}{Rh^5}\left(\frac{1}{12\varepsilon_{1j}}z^4-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon_{0j}}{6\varepsilon_{1j}^2}z^3+\frac{\varepsilon_{0j}^2}{2\varepsilon_{1j}^3}z^2-\frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4}\left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)+z\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)-\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}-z\right]\right)-$$

$$-\frac{1-\nu_j^2}{R^2h^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\left[(z-z_k)^3H(z-z_k)u(z_k)-(z-z_{k+1})^3H(z-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]+$$

$$+C_1\frac{12\left(1-\nu_j^2\right)}{h^3}\left(\frac{1}{2\varepsilon_{1j}}z^2-\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2}\left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)+z\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)-\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}-z\right]\right)+$$

$$\left.+C_2\frac{12\left(1-\nu_j^2\right)}{h^3}\frac{1}{\varepsilon_{1j}}\left[\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)+z\ln(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z)-\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}-z\right]+C_3z+C_4\right],$$

где

$$C_1 = -p^* l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l - 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2\right) +$$

$$+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k + z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})\right],$$

$$C_2 = \frac{1}{2} p^* l^2 - \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3\right) + \frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k + z_{k+1}) \times$$

$$\times\left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k)(l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1})(l - z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})\right] -$$

$$-\frac{hl}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k + z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})\right],$$

$$C_3 = -\left(6p^* \frac{1-\nu_j^2}{h^3} - 12\alpha_j b_2 \frac{(1-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{h^4} + 72\alpha_j a_0 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5}\right)\frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3} \ln \varepsilon_{0j} +$$

$$+24\alpha_j a_1 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5}\frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4} \ln \varepsilon_{0j} + \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3}\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}} \ln \varepsilon_{0j}\left(-p^* l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l -\right.$$

$$-12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2\right) + \frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k + z_{k+1}) \times$$

$$\times\left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})\right] -$$

$$-\frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3}\frac{1}{\varepsilon_{1j}} \ln \varepsilon_{0j}\left[\frac{1}{2} p^* l^2 - \alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l^2 + 12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(\frac{1}{2} a_0 l^2 + \frac{1}{3} a_1 l^3\right) +\right.$$

$$+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k + z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k)(l - z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1})(l - z_{k+1}) \times\right.$$

$$\left.\times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})\right] - \frac{hl}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k + z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) \times\right.$$

$$\left.\left.\times H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})\right]\right],$$

$$C_4 = -\left(6p^* \frac{1-\nu_j^2}{h^3} - 12\alpha_j b_2 \frac{(1-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{h^4} + 72\alpha_j a_0 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5}\right)\frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4}(\ln \varepsilon_{0j} - 1) +$$

$$+24\alpha_j a_1 \frac{(1-\nu_j^2)^2}{Rh^5}\frac{\varepsilon_{0j}^4}{\varepsilon_{1j}^5}(\ln \varepsilon_{0j} - 1) + \frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3}\frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3}(\ln \varepsilon_{0j} - 1)\left(-p^* l + 2\alpha_j b_2 \frac{1+\nu_m}{h} l -\right.$$

$$-12\alpha_j \frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(a_0 l + \frac{1}{2} a_1 l^2\right) + \frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k + z_{k+1}) \times$$

$$\times\left[(\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_k) H(l - z_k) u(z_k) - (\varepsilon_{0j} + \varepsilon_{1j} z_{k+1}) H(l - z_{k+1}) u(z_{k+1})\right] -$$

$$-\frac{12\left(1-\nu_j^2\right)}{h^3}\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2}\left(\ln\varepsilon_{0j}-1\right)\left[\frac{1}{2}p^*l^2-\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l^2+12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(\frac{1}{2}a_0l^2+\frac{1}{3}a_1l^3\right)+\right.$$

$$+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(z_k+z_{k+1}\right)\left[\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k\right)\left(l-z_k\right)H\left(l-z_k\right)u\left(z_k\right)-\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1}\right)\left(l-z_{k+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times H\left(l-z_{k+1}\right)u\left(z_{k+1}\right)\right]-\frac{hl}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(z_k+z_{k+1}\right)\left[\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k\right)H\left(l-z_k\right)u\left(z_k\right)-\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times H\left(l-z_{k+1}\right)u\left(z_{k+1}\right)\right]\right].$$

Получены выражения угла поворота, изгибающего момента и перерезывающей силы составной оболочки:

$$\frac{du}{dz}=\sum_{j=1}^{m}\left[\left(6p^*\frac{1-\nu_j^2}{h^3}-12\alpha_j b_2\frac{\left(1-\nu_j^2\right)\left(1+\nu_j\right)}{h^4}+72\alpha_j a_0\frac{\left(1-\nu_j^2\right)^2}{Rh^5}\right)\left(\frac{1}{2\varepsilon_{1j}}z^2-\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2}z+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3}\ln\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z\right)\right)+24\alpha_j a_1\frac{\left(1-\nu_j^2\right)^2}{Rh^5}\left(\frac{1}{3\varepsilon_{1j}}z^3-\frac{\varepsilon_{0j}}{2\varepsilon_{1j}^2}z^2+\frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3}z^2-\frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4}\ln\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z\right)\right)-$$

$$-\frac{3\left(1-\nu_j^2\right)}{R^2h^2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(z_k+z_{k+1}\right)\left[\left(z-z_k\right)^2H\left(z-z_k\right)u\left(z_k\right)-\left(z-z_{k+1}\right)^2H\left(z-z_{k+1}\right)u\left(z_{k+1}\right)\right]+$$

$$+\frac{12\left(1-\nu_j^2\right)}{h^3}\left(\frac{1}{\varepsilon_{1j}}z-\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}^2}\ln\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z\right)\right)\left(-p^*l+2\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l-12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(a_0l+\frac{1}{2}a_1l^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(z_k+z_{k+1}\right)\left[\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k\right)H\left(l-z_k\right)u\left(z_k\right)-\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1}\right)H\left(l-z_{k+1}\right)u\left(z_{k+1}\right)\right]\right)+$$

$$+\frac{12\left(1-\nu_j^2\right)}{h^3}\frac{1}{\varepsilon_{1j}}\ln\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z\right)\left(\frac{1}{2}p^*l^2-\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l^2+12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(\frac{1}{2}a_0l^2+\frac{1}{3}a_1l^3\right)+\right.$$

$$+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(z_k+z_{k+1}\right)\left[\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k\right)\left(l-z_k\right)H\left(l-z_k\right)u\left(z_k\right)-\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1}\right)\left(l-z_{k+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times H\left(l-z_{k+1}\right)u\left(z_{k+1}\right)\right]-\frac{hl}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}\left(z_k+z_{k+1}\right)\left[\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k\right)H\left(l-z_k\right)u\left(z_k\right)-\left(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times H\left(l-z_{k+1}\right)u\left(z_{k+1}\right)\right]\right)-\left(6p^*\frac{1-\nu_j^2}{h^3}-12\alpha_j b_2\frac{\left(1-\nu_j^2\right)\left(1+\nu_j\right)}{h^4}+72\alpha_j a_0\frac{\left(1-\nu_j^2\right)^2}{Rh^5}\right)\frac{\varepsilon_{0j}^2}{\varepsilon_{1j}^3}\ln\varepsilon_{0j}+$$

$$+24\alpha_j a_1\frac{\left(1-\nu_j^2\right)^2}{Rh^5}\frac{\varepsilon_{0j}^3}{\varepsilon_{1j}^4}\ln\varepsilon_{0j}+\frac{12\left(1-\nu_j^2\right)}{h^3}\frac{\varepsilon_{0j}}{\varepsilon_{1j}}\ln\varepsilon_{0j}\left(-p^*l+2\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l-\right.$$

$$-12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(a_0 l+\frac{1}{2}a_1 l^2\right)+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\times$$
$$\times\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)H(l-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})H(l-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]-$$
$$-\frac{12(1-\nu_j^2)}{h^3}\frac{1}{\varepsilon_{1j}}\ln\varepsilon_{0j}\left[\frac{1}{2}p^* l^2-\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l^2+12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(\frac{1}{2}a_0 l^2+\frac{1}{3}a_1 l^3\right)+\right.$$
$$+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)(l-z_k)H(l-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})(l-z_{k+1})\times\right.$$
$$\left.\times H(l-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]-\frac{hl}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)H(l-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})\times\right.$$
$$\left.\left.\times H(l-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]\right],$$

$$M_z(z)=\sum_{j=1}^{m}\left[-\frac{1}{2}p^* z^2+\alpha_j b_2\frac{1+\nu_j}{h}z^2-12\alpha_j\frac{1-\nu_j^2}{Rh^2}\left(\frac{a_0}{2}z^2+\frac{a_1}{6}z^3\right)+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\times\right.$$
$$\times\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)(z-z_k)H(z-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})(z-z_{k+1})H(z-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]+$$
$$+p^* l z-2\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l z+12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(a_0 l+\frac{1}{2}a_1 l^2\right)z-$$
$$-\frac{hz}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)H(l-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})H(l-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]-$$
$$-\frac{1}{2}p^* l^2+\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l^2-12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(\frac{1}{2}a_0 l^2+\frac{1}{3}a_1 l^3\right)-\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\times$$
$$\times\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)(l-z_k)H(l-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})(l-z_{k+1})H(l-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]+$$
$$\left.+\frac{hl}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)H(l-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})H(l-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]\right],$$

$$Q(z)=\sum_{j=1}^{m}\left[-p^* z+2\alpha_j b_2\frac{1+\nu_j}{h}z-12\alpha_j\frac{1-\nu_j^2}{Rh^2}\left(a_0 z+\frac{a_1}{2}z^2\right)+\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\times\right.$$
$$\times\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)H(z-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})H(z-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]+$$
$$+p^* l-2\alpha_j b_2\frac{1+\nu_m}{h}l+12\alpha_j\frac{1-\nu_m^2}{Rh^2}\left(a_0 l+\frac{1}{2}a_1 l^2\right)-$$
$$\left.-\frac{h}{2R^2}\sum_{k=1}^{n_j}(z_k+z_{k+1})\left[(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_k)H(l-z_k)u(z_k)-(\varepsilon_{0j}+\varepsilon_{1j}z_{k+1})H(l-z_{k+1})u(z_{k+1})\right]\right].$$

**Рис. 2.** Угол прогиба тонкой составной цилиндрической оболочки:
*1* – сталь, *2* – латунь, *3* – медь

На приведенном рис. 2 показан общий угол прогиба тонкой составной цилиндрической оболочки, состоящий из стали, латуни и меди, нагруженной усилием $p = 2\cdot10^3$ Н/м$^2$ в поперечном направлении рассматриваемой оболочки при расчетных данных $E_1 = 19{,}62\cdot10^{10}$ Н/м$^2$, $E_2 = 13{,}73\cdot10^{10}$ Н/м$^2$, $E_3 = 10{,}79\cdot10^{10}$ Н/м$^2$, $\nu_1 = 0{,}28$, $\nu_2 = 0{,}42$, $\nu_3 = 0{,}23$, $\alpha_1 = 14{,}2\cdot10^{-6}\,{}^0C$, $\alpha_2 = 17{,}0\cdot10^{-6}\,{}^0C$, $\alpha_3 = 18{,}9\cdot10^{-6}\,{}^0C$, $R = 5$ см, $h = 1$ см, $l = 2{,}1$ м.

ЛИТЕРАТУРА

1 Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. –М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

2 Тюреходжаев А.Н., Кырыкбаев Б.Ж.. Решение задачи об изгибе гибкой круглой пластины методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2004. – № 3. – С. 66-71.

3 Тюреходжаев А.Н., Рыстыгулова В.Б. Изгиб составной неоднородной кольцевой пластины // Тезисы VII Международной конференции «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте», 23–24 апреля 2008 г., Санкт-Петербург. – С. 178-179.

*В. Б. Рыстығұлова, Ф. Б. Белисарова*

## ҚҰРАМА ЦИЛИНДРЛІК ҚАБЫҚШАНЫҢ БІРТЕКТІ ЕМЕС ТЕМПЕРАТУРАЛЫҚ ӨРІСТЕГІ ДЕФОРМАЦИЯСЫ

Біртекті емес температуралық өрісте, жалпы иілуі коэффициенттері айнымалы төртінші ретті дифференциальдық теңдеумен жазылған, жұқа құрама цилиндрлік қабықшаның деформациясы қарастырылған. Есептің шешімі дифференциальдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісімен алынған.

*V. B. Rystygulova, F. B. Belisarova*

## DEFORMATION OF COMPOSITE CYLINDRICAL SHELL IN INHOMOGENEOUS TEMPERATURE FIELD

Considered the deformation of a thin composite cylindrical shells in a nonuniform temperature field the total bending which is described by a differential equation of the fourth order with variable coefficients. Solution of the problem using the method of partial discretization of differential equations.