УДК 539.3

В. Б. РЫСТЫГУЛОВА, Ф. Б. БЕЛИСАРОВА

ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

КазНПУ им. Абая, КазНУ им. аль-Фараби

Построено дифференциальное уравнение изгиба тонкой составной упругой неоднородной осесимметричной пластины с отверстием, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость и работает в неравномерном температурном поле. Аналитическое решение задачи для линейного закона изменения жесткости на каждом участке пластины получено методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений.

Построено дифференциальное уравнение изгиба тонкой составной упругой неоднородной осесимметричной пластины с отверстием, каждая составляющая которой имеет переменную жесткость и работает в неравномерном температурном поле. Аналитическое решение задачи получено методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [1]. В качестве иллюстрации приводится решение задачи для линейного закона изменения жесткости на каждом участке пластины.

Сложный изгиб таких пластин приводится к рассмотрению системы двух связанных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. В данной работе рассматривается изгиб составной пластины без учета растяжения или сжатия. Тогда дифференциальное уравнение изгиба пластины, состоящей из m кольцевых, имеет вид

$$r^2\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+r\left(1+\frac{r}{D^j}\frac{dD^j}{dr}\right)\frac{d\vartheta}{dr}+\left(\frac{\nu^j\, r}{D^j}\frac{dD^j}{dr}-1\right)\vartheta+$$
$$+\frac{r}{D^j}\left(\int q_z^j r\,dr-C\right)-\frac{(1+\nu^j)r^2}{D^j}\frac{d}{dr}\left(\chi_T D^j\right)=0\,, \tag{1}$$

где

$$D^j=\sum_{j=1}^{m}\frac{E_j h^3}{12(1-\nu_j^2)}\left[H(r-r_j)-H(r-r_{j+1})\right],\quad -\int q_z^j r\,dr+C=Q_r r\,,$$

где ϑ – угол поворота пластины; D^j – цилиндрическая жесткость изгиба; E_j – модуль упругости; ν^j – коэффициент Пуассона j-той составляющей пластины; h – толщина пластины; $q_z^j=\sum_{j=1}^{m}q_{zj}\left[H(r-r_j)-H(r-r_{j+1})\right]$ – распределенная поперечная нагрузка; $Q_r^j=\sum_{j=1}^{m}Q_{rj}\left[H(r-r_j)-H(r-r_{j+1})\right]$ – поперечное усилие; C – постоянная, определяемая из условия

$$r=r_b\quad Q_r=Q_0,$$

где r_b – внешний радиус составной пластины.

Соотношения между изгибающим моментами и прогибом имеют выражения

$$M_r^j=-D^j\left[\frac{d\vartheta}{dr}+\nu^j\frac{\vartheta}{r}+(1+\nu^j)\chi_T\right],$$
$$M_\theta^j=-D^j\left[\nu^j\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{1}{r}\vartheta+(1+\nu^j)\chi_T\right].$$

Дискретизируя третий член уравнения (1), имеем

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{D'^j}{D^j}\right)\frac{d\vartheta}{dr}=-\frac{1}{rD^j}\left(\int q_z^j r\,dr-\left[Q_0 r_b+q_z^j\frac{r_b^2}{2}\right]\right)+$$

$$+(1+\nu)\chi_T\frac{D'^j}{D^j}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n_j}(r_{kj}+r_{(k+1)j})\times\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n_j}(r_{kj}+r_{(k+1)j})\times\right.\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{r_{kj}^2}\left(\nu r_{kj}\left(\frac{D'^j}{D^j}\left[H(r-r_{kj})-H(r-r_{(k+1)j}\right]+\left[\delta(r-r_{kj})-\delta(r-r_{(k+1)j}\right]\right)-1\right)\times\right.$$

$$\times\vartheta(r_{kj})\delta(r-r_{kj})-\frac{1}{r_{(k+1)j}^2}\left(\nu_j r_{(k+1)j}\left(\frac{D'^j}{D^j}\left[H(r-r_{(k+1)j})-H(r-r_{(k+2)j}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[\delta(r-r_{(k+1)j})-\delta(r-r_{(k+2)j}\right]\right)-1\right)\vartheta(r_{(k+1)j})\delta(r-r_{(k+1)j})\right]\Big).$$

Рассмотрим задачу для частного случая линейного изменения жесткости по участкам пластины

$$D^j(r)=\sum_{j=1}^{m}(a_j r+b_j)\left[H(r-r_j)-H(r-r_{j+1})\right].$$

Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\vartheta=\sum_{j=1}^{m}\left(C_1\frac{a_j}{b_j}\ln\frac{r}{r+b_j/a_j}+C_2+\frac{a_j}{b_j}\ln\frac{r}{r+b_j/a_j}\int\Phi(r,r_k)\,r(r+b_j/a_j)dr-\right.$$

$$\left.-\frac{a_j}{b_j}\int\Phi(r,r_k)\,r(r+b_j/a_j)\ln\frac{r}{r+b_j/a_j}dr\right),\qquad(2)$$

где

$$\Phi(r,r_k)=-\frac{1}{r\,a_j(r+b_j/a_j)}\left(\int q_{zj}r\,dr-\left[Q_0 r_b+q_{zj}\frac{r_b^2}{2}\right]\right)+(1+\nu_j)\chi_T\frac{1}{r+b_j/a_j}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n_j}(r_{kj}+r_{(k+1)j})\right)\left[\frac{1}{r_{kj}^2}\left(\nu r_{kj}\frac{1}{r_{kj}+b_j/a_j}-1\right)\vartheta(r_{kj})\delta(r-r_{kj})-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{r_{(k+1)j}^2}\left(\nu r_{(k+1)j}\frac{1}{r_{(k+1)j}+b_j/a_j}-1\right)\vartheta(r_{(k+1)j})\delta(r-r_{(k+1)j})\right]\right].$$

Граничные условия задачи примем

$$r=r_b,\ \vartheta=0,$$

$$r=r_a,\ -D^1\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+\frac{\nu_1}{r}\vartheta+(1+\nu_1)\chi_T\right)=M_0.$$

Решение задачи для угла поворота составной пластины может быть записано следующим образом

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{m} \left(C_1 \frac{a_j}{b_j} \mathbf{ln}\left(r + \frac{b_j}{a_j} \right) + C_2 + \frac{q_{zj}}{2} \left[-\frac{r}{6a_j} + \frac{b_j}{3a_j^2} r - \frac{b_j^2}{3a_j^3} \mathbf{ln}\left(r + \frac{b_j}{a_j} \right) \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{a_j} \left[Q_0 r_b + q_{zj} \frac{r_b^2}{2} \right] \mathbf{ln}\left(r + \frac{b_j}{a_j} \right) - (1+\nu_j)\chi_T \left[-\frac{r}{2} + \frac{b_j}{2a_j} \mathbf{ln}\left(r_b + \frac{b_j}{a_j} \right) \right] + \frac{a_j}{2b_j} \mathbf{ln} \frac{r}{r + b_j / a_j} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \vartheta(r_{kj}) H(r - r_{kj}) - \right.$$

$$\left. - \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \vartheta(r_{(k+1)j}) H(r - r_{(k+1)j} \right] + \frac{a_j}{2b_j} \sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\mathbf{ln} \frac{r_{kj}}{r_{kj} + b_j / a_j} \times \right.$$

$$\times \left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \vartheta(r_{kj}) H(r - r_{kj}) - \mathbf{ln} \frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j} + b_j / a_j} \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \times$$

$$\left. \times \vartheta(r_{(k+1)j}) H(r - r_{(k+1)j} \right] \Big),$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{r_a (r_a + b_1 / a_1)} + \dfrac{\nu_1}{r_a} \dfrac{a_1}{b_1} \mathbf{ln} \dfrac{r_a}{r_a + b_1 / a_1} - \dfrac{\nu_1}{r_a} \dfrac{a_m}{b_m} \mathbf{ln} \dfrac{r_a}{r_a + b_m / a_m}} \times$$

$$\times \left(\frac{-M_0}{a_1 (r_a + b_1 / a_1)} + \frac{\nu_1}{r_a} \frac{q_{zm}}{2} \left[-\frac{r_b^2}{6a_m} + \frac{b_m}{3a_m^2} r_b - \frac{b_m^2}{3a_m^3} \mathbf{ln}(r_b + b_m / a_m) \right] + \right.$$

$$+ \frac{\nu_1}{r_a} \frac{1}{a_m} \left[Q_0 r_b + q_{zm} \frac{r_b^2}{2} \right] \mathbf{ln}(r_b + b_m / a_m) - \frac{\nu_1}{r_a} (1 + \nu_m) \chi_T \left[-\frac{r_b}{2} + \frac{b_m}{2a_m} \mathbf{ln}(r_b + b_m / a_m) \right] -$$

$$- \frac{\nu_1}{r_a} \frac{a_m}{2b_m} \ln \frac{r_b}{r_b + b_m / a_m} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \vartheta(r_{kj}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \vartheta(r_{(k+1)j}) \right] \right) + \frac{\nu_1}{r_a} \frac{a_m}{2b_m} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n_j} (r_{kj} + r_{(k+1)j}) \left[\mathbf{ln} \frac{r_{kj}}{r_{kj} + b_j / a_j} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left(\nu_j - \frac{r_{kj} + b_j / a_j}{r_{kj}} \right) \vartheta(r_{kj}) - \ln \frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j} + b_j / a_j} \left(\nu_j - \frac{r_{(k+1)j} + b_j / a_j}{r_{(k+1)j}} \right) \vartheta(r_{(k+1)j}) \right] \right) -$$

$$- \frac{q_z}{2} \left[-\frac{r_a}{3a_1} + \frac{b_1}{3a_1^2} r - \frac{b_1^2}{3a_1^3} \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} \right] - \frac{1}{a_1} \left[Q_0 r_b + q_{z1} \frac{r_b^2}{2} \right] \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} +$$

$$+ (1 + \nu_1) \chi_T \left[-\frac{1}{2} + \frac{b_1}{2a_1} \frac{1}{r_a + b_1 / a_1} \right] - \frac{\nu_1}{r_a} \frac{q_{z1}}{2} \left[-\frac{r_a^2}{6a_1} + \frac{b_1}{3a_1^2} r_a - \frac{b_1^2}{3a_1^3} \mathbf{ln}\left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] -$$

$$\left. - \frac{\nu_1}{r_a} \frac{1}{a_1} \left[Q_0 r_b + q_{z1} \frac{r_b^2}{2} \right] \mathbf{ln}\left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) + \frac{\nu_1}{r_a} (1 + \nu_1) \chi_T \left[-\frac{r_a}{2} + \frac{b_1}{2a_1} \mathbf{ln}\left(r_a + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] - (1 + \nu_1) \chi_T \right),$$

$$C_2=-\frac{\dfrac{a_m}{b_m}\ln\dfrac{r_b}{r_b+b_m/a_m}}{\dfrac{1}{r_a(r_a+b_1/a_1)}+\dfrac{\nu_1}{r_a}\dfrac{a_1}{b_1}\ln\dfrac{r_a}{r_a+b_1/a_1}-\dfrac{\nu_1}{r_a}\dfrac{a_m}{b_m}\ln\dfrac{r_a}{r_a+b_m/a_m}}\times$$

$$\times\left(\frac{-M_0}{a_1(r_a+b_1/a_1)}+\frac{\nu_1}{r_a}\frac{q_{zm}}{2}\left[-\frac{r_b^2}{6a_m}+\frac{b_m}{3a_m^2}r_b-\frac{b_m^2}{3a_m^3}\ln(r_b+b_m/a_m)\right]+\frac{\nu_1}{r_a}\frac{1}{a_m}\left[Q_0r_b+q_{zm}\frac{r_b^2}{2}\right]\times\right.$$

$$\times\ln(r_b+b_m/a_m)-\frac{\nu_1}{r_a}(1+\nu_m)\chi_T\left[-\frac{r_b}{2}+\frac{b_m}{2a_m}\ln(r_b+b_m/a_m)\right]-\frac{\nu_1}{r_a}\frac{a_m}{2b_m}\ln\frac{r_b}{r_b+b_m/a_m}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n_j}(r_{kj}+r_{(k+1)j})\left[\left(\nu_j-\frac{r_{kj}+b_j/a_j}{r_{kj}}\right)\vartheta(r_{kj})-\left(\nu_j-\frac{r_{(k+1)j}+b_j/a_j}{r_{(k+1)j}}\right)\vartheta(r_{(k+1)j})\right]\right)+\frac{\nu_1}{r_a}\frac{a_m}{2b_m}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n_j}(r_{kj}+r_{(k+1)j})\left[\ln\frac{r_{kj}}{r_{kj}+b_j/a_j}\left(\nu_j-\frac{r_{kj}+b_j/a_j}{r_{kj}}\right)\vartheta(r_{kj})-\ln\frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j}+b_j/a_j}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\nu_j-\frac{r_{(k+1)j}+b_j/a_j}{r_{(k+1)j}}\right)\vartheta(r_{(k+1)j})\right]\right)-\frac{q_z}{2}\left[-\frac{r_a}{3a_1}+\frac{b_1}{3a_1^2}r-\frac{b_1^2}{3a_1^3}\frac{1}{r_a+b_1/a_1}\right]-\frac{1}{a_1}\times$$

$$\times\left[Q_0r_b+q_{z1}\frac{r_b^2}{2}\right]\frac{1}{r_a+b_1/a_1}+(1+\nu_1)\chi_T\left[-\frac{1}{2}+\frac{b_1}{2a_1}\frac{1}{r_a+b_1/a_1}\right]-\frac{\nu_1}{r_a}\frac{q_{z1}}{2}\times$$

$$\times\left[-\frac{r_a^2}{6a_1}+\frac{b_1}{3a_1^2}r_a-\frac{b_1^2}{3a_1^3}\ln\left(r_a+\frac{b_1}{a_1}\right)\right]-\frac{\nu_1}{r_a}\frac{1}{a_1}\left[Q_0r_b+q_{z1}\frac{r_b^2}{2}\right]\ln\left(r_a+\frac{b_1}{a_1}\right)+$$

$$\left.+\frac{\nu_1}{r_a}(1+\nu_1)\chi_T\left[-\frac{r_a}{2}+\frac{b_1}{2a_1}\ln\left(r_a+\frac{b_1}{a_1}\right)\right]-(1+\nu_1)\chi_T\right)-$$

$$-\frac{q_{zm}}{2}\left[-\frac{r_b^2}{6a_m}+\frac{b_m}{3a_m^2}r_b-\frac{b_m^2}{3a_m^3}\ln\left(r_b+\frac{b_m}{a_m}\right)\right]-\frac{1}{a_m}\left[Q_0r_b+q_{zm}\frac{r_b^2}{2}\right]\ln\left(r_b+\frac{b_m}{a_m}\right)+$$

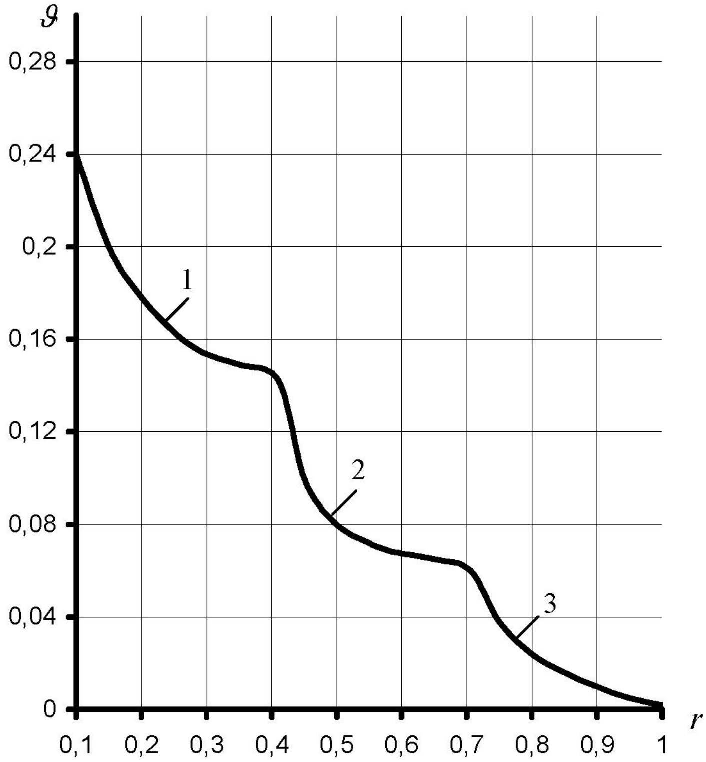
$$+(1+\nu_m)\chi_T\left[-\frac{r_b}{2}+\frac{b_m}{2a_m}\ln\left(r_b+\frac{b_m}{a_m}\right)\right]+\frac{a_m}{2b_m}\ln\frac{r_b}{r_b+b_m/a_m}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n_j}(r_{kj}+r_{(k+1)j})\left[\left(\nu_j-\frac{r_{kj}+b_j/a_j}{r_{kj}}\right)\vartheta(r_{kj})-\right.\right.$$

$$-\frac{a_m}{2b_m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n_j}(r_{kj}+r_{(k+1)j})\left[\ln\frac{r_{kj}}{r_{kj}+b_j/a_j}\left(\nu_j-\frac{r_{kj}+b_j/a_j}{r_{kj}}\right)\vartheta(r_{kj})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln\frac{r_{(k+1)j}}{r_{(k+1)j}+b_j/a_j}\left(\nu_j-\frac{r_{(k+1)j}+b_j/a_j}{r_{(k+1)j}}\right)\vartheta(r_{(k+1)j})\right]\right).$$

Результаты расчета для выбранного закона изменения жесткости показаны на графике.



Зависимость угла поворота кольцевой пластины от радиуса:
1 – свинец, *2* – алюминий, *3* – латунь

Из приведенного графика, как и следовало ожидать, видно, что угол поворота, а также прогиб, усилия и изгибающие моменты имеют различные законы изменения для различных участков рассматриваемой пластины. Для сплошной пластины решение задачи получено в работе А. Д. Коваленко [2].

ЛИТЕРАТУРА

1 Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К. Сложный изгиб гибкой кольцевой пластины в осесимметричном температурном поле // Доклады НАН РК. – 2005. – № 2. – С. 86-92.

2 Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. – М.: Физматгиз, 1959. – 294 с.

В. Б. Рыстығұлова, Ф. Б. Белисарова

ҚҰРАМА СЕРПІМДІ БІРТЕКТІ ЕМЕС ПЛАСТИНА ИІЛІМІНІҢ ЕСЕБІ

Ортасы ойық жұқа, әрбір құраушысының қатаңдығы айнымалы және біртекті емес температуралық өрісте жұмыс жасайтын, құрама серпімді біртекті емес өсі симметриялы пластина иілуінің дифференциальдық теңдеуі құрылған. Пластинаның әрбір бөлігіндегі қатаңдықтың өзгеруінің сызықты заңы үшін есептің аналитикалық шешімі сызықты емес дифференциальдық теңдеулерді бөліктеп дискретизациялау әдісімен алынған.

V. B. Rystygulova, F. B. Belisarova

THE BENDING PROBLEM OF THE COMPLEX ELASTIC HETEROGENEOUS PLATE

Built a differential equation of the complex elastic bending of a thin plate with a non-uniform axisymmetric hole, each component of which has a variable stiffness and works in non-uniform temperature field. Analytical solution of the problem for a law change stiffness in each section of the plate received by the partial discretization of nonlinear differential equations.