УДК 517.946

А. В. РОГОВОЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНОГО РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ И ЕЕ СОПРЯЖЕННОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной: при $y<0$ – характеристиками $AC: \ x+y=0$ и $BC: \ x-y=1$, а при $y>0$ - кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x,y): \left(x-\frac{1}{2} \right)^2 + (y+\delta)^2 = \frac{1}{4}+\delta^2, \quad y>0 \right\},$$

рассматривается однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{AC \cup \sigma_\delta} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{ y=0 \}$

$$u(x,+0) = u(x,-0), \tag{3}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0). \tag{4}$$

В работах [1, 2] для задачи (1)-(4) было показано существование разрывного решения в некоторой окрестности точки $B(1,0)$, причем получено явное представление этого решения в виде ряда. В настоящей работе этот результат усилен, а именно установлено существование бесконечного множества разрывных решений задачи (1)-(4) и получено явное представление этих решений во всей области Ω. Кроме того, аналогичный результат получен и для сопряженной задачи к задаче (1)-(4), а именно для задачи

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1*}$$

$$u|_{BC \cup \sigma_\delta} = 0, \tag{2*}$$

$$u(x,+0) = u(x,-0), \tag{3*}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0). \tag{4*}$$

Дадим следующее определение угла подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения:

$$\gamma_\delta = arcctg 2\delta, \qquad 0<\gamma_\delta<\pi. \tag{5}$$

Докажем, что функция

$$u(x,y) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\dfrac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^\alpha + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^\alpha, & y>0, \\ \left(\dfrac{1}{1-x-y} - 1 \right)^\alpha, & y<0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\alpha = \frac{\dfrac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta}, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{7}$$

будет решением задачи (1)-(4) для произвольных контуров σ_δ.

Обозначим

$$v(x,y)=\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha}, \tag{8}$$

то есть

$$u(x,y)=\operatorname{Re}v(x,y)+\operatorname{Im}v(x,y) \quad \text{при} \quad y>0. \tag{9}$$

Докажем, что функция (6) удовлетворяет соотношениям (1)-(4).

При $y<0$ уравнение (1) записывается в виде $u_{xx}-u_{yy}=0$.

Учитывая представление функции (6) при $y<0$: $u(x,y)=\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha}$, имеем

$$u_{xx}(x,y)=\alpha(\alpha-1)\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-2}\cdot\frac{1}{(1-x-y)^4}+\alpha\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{2}{(1-x-y)^3};$$

$$u_{yy}(x,y)=\alpha(\alpha-1)\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-2}\cdot\frac{1}{(1-x-y)^4}+\alpha\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{2}{(1-x-y)^3}.$$

Следовательно,

$$u_{xx}-u_{yy}=\alpha(\alpha-1)\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-2}\cdot\frac{1}{(1-x-y)^4}+\alpha\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{2}{(1-x-y)^3}-$$
$$-\alpha(\alpha-1)\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-2}\cdot\frac{1}{(1-x-y)^4}-\alpha\cdot\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{2}{(1-x-y)^3}=0,$$

так как $x+y\neq 1$ в Ω^-.

Таким образом, функция (6) удовлетворяет уравнению (1) при $y<0$.

При $y>0$ уравнение (1) записывается в виде $u_{xx}+u_{yy}=0$. Согласно (6), имеет место следующее представление функции $u(x,y)$ при $y>0$

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha}+\operatorname{Im}\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha}.$$

Предварительно вычислим значение выражения

$$v_{xx}+v_{yy}, \quad \text{где} \quad v(x,y)=\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha}.$$

Имеем:

$$v_{xx}=\alpha(\alpha-1)\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-2}\frac{(1-x)^4+4(1-x)^3y\cdot i-6(1-x)^2y^2-4(1-x)y^3\cdot i+y^4}{\left((1-x)^2+y^2\right)^4}+$$
$$+\alpha\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-1}\frac{2(1-x)^3+6(1-x)^2y\cdot i-6(1-x)y^2-2y^3\cdot i}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3};$$

$$v_{yy} = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-2}\frac{-(1-x)^4-4(1-x)^3y\cdot i+6(1-x)^2y^2+4(1-x)y^3\cdot i-y^4}{\left((1-x)^2+y^2\right)^4}+$$

$$+\alpha\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha-1}\frac{-2(1-x)^3-6(1-x)^2y\cdot i+6(1-x)y^2+2y^3\cdot i}{\left((1-x)^2+y^2\right)^3}.$$

Таким образом, $v_{xx}+v_{yy}=0$, так как $(1-x)^2+y^2\neq 0$ в Ω^+, следовательно

$$\operatorname{Re}(v_{xx}+v_{yy})+\operatorname{Im}(v_{xx}+v_{yy})=0 \quad\Rightarrow\quad u_{xx}+u_{yy}=0.$$

В итоге функция (6) удовлетворяет уравнению (1) как при $y>0$, так и при $y<0$.

При $y<0$ краевое условие (2) примет вид $u|_{AC}=u|_{x+y=0}=0$. Учитывая представление функции (6) при $y<0$

$$u(x,y)=\left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\alpha}=\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^{\alpha},$$

имеем

$$u|_{AC}=u|_{x+y=0}=\left.\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^{\alpha}\right|_{x+y=0}=0, \text{ так как } \alpha>0.$$

Таким образом, функция (6) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2).

При $y>0$ краевое условие (2) примет вид $u|_{\sigma_\delta}=0$. Представление функции (6) при $y>0$ следующее $u(x,y)=\operatorname{Re}v(x,y)+\operatorname{Im}v(x,y)$,
где

$$v(x,y)=\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\alpha}=\left(\frac{1-x+iy-(1-x)^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}=\left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}.$$

Преобразованное выражение для контура σ_δ имеет вид: $2y\delta=(1-x)-(1-x)^2-y^2$.

Таким образом, краевое условие запишется как $u\big|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta}=0$. Имеем, учитывая определение (5) числа γ_δ:

$$v(x,y)\big|_{\sigma_\delta}=\left.\left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}\right|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta}=\left(\frac{2y\delta+iy}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}=$$

$$=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}(2\delta+i)^{\alpha}=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}(ctg\gamma_\delta+i)^{\alpha}=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos\gamma_\delta}{\sin\gamma_\delta}+i\right)^{\alpha}=$$

$$=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos\gamma_\delta+i\sin\gamma_\delta}{\sin\gamma_\delta}\right)^{\alpha}=\left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\sin\gamma_\delta}\right)^{\alpha}(\cos\alpha\gamma_\delta+i\sin\alpha\gamma_\delta);$$

следовательно,

$$u|_{\sigma_\delta} = \left(\operatorname{Re} v(x,y) + \operatorname{Im} v(x,y)\right)\Big|_{\sigma_\delta} = \left(\frac{y}{(1-x)^2 + y^2}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{\sin\gamma_\delta}\right)^{\alpha} \left(\cos\alpha\gamma_\delta + \sin\alpha\gamma_\delta\right);$$

но, согласно условию (7),

$$\alpha = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta} \quad\Rightarrow\quad \alpha\gamma_\delta = \frac{3\pi}{4} + \pi k \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha\gamma_\delta + \sin\alpha\gamma_\delta = 0\,.$$

Таким образом, $$u|_{\sigma_\delta} = 0\,.$$

В итоге краевое условие (2) выполнено полностью для функции (6).

Для проверки условий (3)-(4) получим из представления функции (6)

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^{\alpha},\quad u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \alpha\cdot\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(1-x)^2},$$

и условия (3)-(4) выполнены.

В итоге функция (6) является решением однородной задачи Трикоми (1)-(2), причем выполнены условия (3)-(4). Но, как легко видеть, функция (6) является разрывной в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1)-(2)), причем выполнены условия (3)-(4). Данное решение определяется по формуле (6), а сама задача является некорректной в классе разрывных функций.*

Полностью аналогично доказывается теорема и для сопряженной задачи.

Теорема 2. *Существует разрывное в точке $A(0,0)$ решение сопряженной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1*)-(2*)), причем выполнены условия (3*)-(4*). Данное решение определяется по формуле*

$$u^*(x,y) = \begin{cases} \left(\operatorname{Re}\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1\right)\right)^{\alpha} + \operatorname{Im}\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1\right)^{\alpha}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{x-y} - 1\right)^{\alpha}, & y < 0, \end{cases} \tag{10}$$

а сама задача является некорректной в классе разрывных функций.

Таким образом, для каждого контура σ_δ, то есть для каждого δ, существует бесконечное множество разрывных решений обоих задач. При этом, полагая в формуле (7) $k = 1,2,...$, получим решения с особенностями: > 1, > 2, …, т.е. особенность может быть сколь угодно большой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роговой А.В.* Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае не бесконечно гладких контуров // Вестник НАН РК. 2007. № 6. С. 58-61.

2. *Роговой А.В.* Существование разрывного решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае не бесконечно гладкого контура // Математический журнал. 2009. № 3. С. 78-84.

Резюме

Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін біртекті Трикоми есебі мен оның түйісуі қарастырылады. Екі есептің тривиалды емес ажырау шешімі бар екендігі дәлелденді. Ал шешімдері айқын түрде құрастырылған.

Summary

Homogeneous Tricomi problem and it's conjugate problem for Lavrentjev-Bitsadze equation have been considered in the work. The existence of non trivial and non continuous solutions of both problems has been proved, and these solutions have been built.

Южно-Казахстанский гуманитарный институт им. М. Сапарбаева, г. Шымкент *Поступила 26.04.2010г.*