

УДК 517.946

A.B.РОГОВОЙ

О ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ И ЕЕ СОПРЯЖЕННОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

(Представлена академиком НАН РК Т.Ш. Кальменовым)

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y < 0$ – характеристиками AC : $x + y = 0$, и BC : $x - y = 1$, а при $y > 0$ – кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad y > 0 \right\},$$

рассмотрим задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (1)$$

$$u|_{\sigma \cup AC} = 0, \quad (2)$$

причем должны выполняться следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad (3)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \quad (4)$$

Сопряженной задачей к задаче (1)-(2) является также задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, но краевое условие в гиперболической части области задается не на характеристике AC , а на характеристике BC :

$$\operatorname{sgn} y \cdot v_{xx} + v_{yy} = g(x, y), \quad (1^*)$$

$$v|_{BC \cup \sigma_\delta} = 0, \quad (2^*)$$

причем также должны выполняться условия «склеивания»

$$v(x, +0) = v(x, -0), \quad (3^*)$$

$$v_y(x, +0) = v_y(x, -0), \quad (4^*)$$

Таким образом, задачи (1)-(4) и (1^{*})-(4^{*}) образуют пару взаимно сопряженных краевых задач.

В работах [1]-[2] для задачи (1)-(4) было показано существование разрывного решения однородной задачи Трикоми в некоторой окрестности точки $B(1,0)$, причем получено явное представление этого решения в виде ряда. В настоящей работе этот результат значительно усилен,

а именно установлено существование бесконечного множества разрывных решений задачи (1)-(4) при $f \equiv 0$ и получено явное представление этих решений во всей области Ω . Аналогичный результат получен и для сопряженной задачи (1^{*})-(4^{*}). Кроме того, полученные разрывные решения исходной и сопряженной задач использованы для формулировки условий непрерывности и различной гладкости неоднородной задачи Трикоми и ее сопряженной.

Обозначим угол подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения, то есть угол между касательной к кривой в точках A или B и отрезком AB , следующим образом

$$\gamma_\delta = \operatorname{arcctg} 2\delta, \quad 0 < \gamma_\delta < \pi. \quad (5)$$

Имеют место следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1 Существует бесконечное множество разрывных в точке $B(1,0)$ решений однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1)-(2)), причем выполнены условия (3)-(4). Данные решения определяются по формуле

$$u_k(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^a + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^a, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^a, & y < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

а сама задача является некорректной в классе разрывных функций.

Лемма 2 Существует разрывное в точке $A(0,0)$ решение сопряженной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (1^{*})-(2^{*})), причем выполнены условия

(3*)-(4*). Данное решение представимо по формуле

$$v_k(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2}-1\right)^{\alpha} + \operatorname{Im}\left(\frac{x+iy}{x^2+y^2}-1\right)^{\alpha}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{x-y}\right)^{\alpha}, & y < 0, \end{cases} \quad (8)$$

где α определяется из соотношения (7), а сама задача является некорректной в классе разрывных функций.

Доказательство обоих лемм достаточно провести простой подстановкой формул (6) и (8) в соотношения (1)-(4) и (1*)-(4*) соответственно и проверкой их выполнения. Отметим также, что индексы k для функций $u_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$ соответствуют значению k из определения (7) числа α .

Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема 1 Необходимым и достаточным условием непрерывности решения задачи Трикоми (задачи (1)-(4)) для любой гладкой правой части является следующее:

$$\gamma_\delta < \frac{3\pi}{4}. \quad (9)$$

При невыполнении условия (9) для непрерывности и гладкости решения (то есть принадлежности решения $u(x, y)$ классу C^k , $k = 0, 1, \dots$) на правую часть уравнения должно быть наложено k условий

$$\iint_{\Omega} v_n(x, y) f(x, y) dx dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (10)$$

а именно: скалярные произведения по области Ω правой части $f(x, y)$ и соответствующих разрывных решений сопряженной задачи с особенностями до k -го порядка включительно должны быть все равны нулю.

Теорема 2 Необходимым и достаточным условием непрерывности решения сопряженной задачи Трикоми (задачи (1*)-(4*)) для любой гладкой правой части является условие (9). При его невыполнении для непрерывности и гладкости решения (то есть принадлежности решения $v(x, y)$ классу C^k , $k = 0, 1, \dots$) на правую часть уравнения должно быть наложено k условий

$$\iint_{\Omega} u_n(x, y) g(x, y) dx dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (11)$$

а именно: скалярные произведения по области Ω правой части $g(x, y)$ и соответствующих разрывных решений сопряженной задачи с особенностями до k -го порядка включительно должны быть равны нулю.

Доказательство проведем для теоремы 1. Доказательство теоремы 2 будет полностью аналогичным.

Доказательство. Обозначим

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (12)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x). \quad (13)$$

Используем замену переменных

$$x = \frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, \quad y = \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x(1-x) - y^2}, \quad (14)$$

а также преобразование Мелинина

$$F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx \text{ начальных и искомых данных задачи}$$

$$\bar{\tau}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \tau\left(\frac{x}{1+x}\right) dx, \quad (15)$$

$$\bar{\nu}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot x \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^2} dx, \quad (16)$$

$$\bar{F}_1(s) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty x^{s-1} \int_0^{1+x} d\xi_1 \int_{\xi_1}^x f\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1, \quad (17)$$

$$\bar{f}(s, \varphi) = \int_0^\infty r^{s-1} \cdot \frac{r^2}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2} f\left(\frac{r^2 + r \cos \varphi}{1+2r \cos \varphi + r^2}, \right. \\ \left. \frac{r \sin \varphi}{1+2r \cos \varphi + r^2}\right) dr, \quad (18)$$

$$\bar{u}(s, \varphi) = \int_0^\infty r^{s-1} u(r, \varphi) dr. \quad (19)$$

Кроме того, обозначим

$$\bar{u}_1(s, \varphi) = \sin s \varphi, \quad (20)$$

$$\bar{u}_2(s, \varphi) = \cos s \varphi - \sin s \varphi \cdot \frac{\cos s \gamma_\delta}{\sin s \gamma_\delta}. \quad (21)$$

Тогда решение задачи Трикоми выписывается следующим образом [3]:

$$y < 0 : \quad u(x, y) = \int_0^{x+y} v(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{x+y} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{x-y} f\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1 \quad (22)$$

$$y > 0 : \quad \bar{u}(s, \varphi) = \bar{\tau}(s) \cdot \bar{u}_2(s, \varphi) - \frac{1}{s} \bar{u}_1(s, \varphi) \int_s^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt - \frac{1}{s} \bar{u}_2(s, \varphi) \int_0^\varphi \bar{u}_1(s, t) \bar{f}(s, t) dt, \quad (23)$$

а функции $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{v}(s)$ определяются из следующих соотношений

$$\bar{\tau}(s) = \frac{s \bar{F}_1(s) + \int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt}{s(1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta)}, \quad (24)$$

$$\bar{v}(s) = \frac{-\operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot s \cdot \bar{F}_1(s) - \int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt}{1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta}, \quad (25)$$

причем для непрерывности функций $\tau(x)$ и $v(x)$, а значит и решения задачи, правые части соотношений (24) и (25) должны быть непрерывны при

$$-1 < s < 0, \quad (26)$$

а для принадлежности решения классу C^k те же правые части соотношений (24) и (25) должны быть непрерывны при

$$-k - 1 < s < 0, \quad (27)$$

Отсюда видно, что необходимым и достаточным условием непрерывности решения задачи Трикоми для любой гладкой правой части является условие (9).

Предположим, что условие (9) не выполнено. Это означает, что при

$$s = -\alpha = -\frac{3\pi}{4\gamma_\delta} \in (-1, 0) \quad \left(s = -\frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta}, \quad k = 0, 1, \dots \right)$$

знаменатель в (24) обращается в нуль. Поэтому для непрерывности или соответствующей гладкости решения мы должны потребовать, чтобы и числитель был равен нулю

$$\left. \left(s \bar{F}_1(s) + \int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt \right) \right|_{s=-\alpha} = 0, \quad (28)$$

где α определяется из соотношения (7) при различных k (а условие (28) представляет собой k условий), то есть наложить некоторые условия на правую часть уравнения (1) $f(x, y)$.

Используя свойства преобразования Меллина [4, с. 567]

$$g(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx \Rightarrow sg(s) = - \int_0^\infty x^{s-1} \cdot xf'(x) dx, \quad (29)$$

учитывая формулы [5, с. 666 – 667], [6, с. 206]

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(\xi, x) d\xi \Rightarrow I'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f'_x(\xi, x) d\xi + \beta'(x) f(\beta(x), x) - \alpha'(x) f(\alpha(x), x), \quad (30)$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv, \quad (31)$$

проводя последовательно замены

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} &= t \quad \text{и} \\ t = x - y, \quad \xi_1 &= x + y \Leftrightarrow \frac{\xi_1 + t}{2} = x, \quad \frac{\xi_1 - t}{2} = y, \end{aligned}$$

получим из соотношения (24)

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\iint_{\Omega} \left(\frac{x-y}{1-(x-y)} \right)^{\alpha} f(x, y) dx dy + \int_0^{\gamma_\delta} (\cos st - \sin st \cdot \operatorname{ctg} s \gamma_\delta) \bar{f}(s, t) dt}{s(1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta)}.$$

При $s = -\alpha$, сделав обратную замену переменных по формулам (14) и перейдя к переменным x , y , получим из соотношения (28) с учетом формул (7), (8), (18), (21), (31), (32)

$$\begin{aligned} \left. \left(s \bar{F}_1(s) + \int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt \right) \right|_{s=-\alpha} &= \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{1-(x-y)}{x-y} \right)^{\alpha} f(x, y) dx dy + \\ &\quad + \iint_{\Omega^+} v_0(x, y) f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega^-} v_n(x, y) f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega^+} v_n(x, y) f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} v_n(x, y) f(x, y) dx dy = 0, \end{aligned}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, k$.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роговой А.В. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае не бесконечно гладких контуров// Вестник НАН РК, 2007, №6. С. 58-61.
2. Роговой А.В. Существование разрывного решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае не бесконечно гладкого контура// Математический журнал. 2009, №3, С. 78-84.
3. Роговой А.В. Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина, автореферат диссертации ... кандидата физико-математических наук, Шымкент, 2004, 26с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965, 716с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: Физматгиз, 1964, 800с.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. М.: Физматгиз, 1966, 656с.

Резюме

Біртекті түйіскен есептің ажырау шешімі арқылы Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін Трикомидің біртекті емес есебінің түрлі жақын шешімі мен үздіксіздік шарты алынды.

Summary

Conditions of existence of continuous and various smooth solutions of non homogeneous Tricomi problem for Lavrentjev-Bitsadze equation, using non continuous solutions of homogeneous conjugate problem, have been conideved in the work.

Южно-Казахстанский гуманитарный институт
им. М.Сапарбаева,
г.Шымкент

Поступила 29.10.2010 г.