ФИЗИКА

Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. О. ИСМАЙЛОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО ГРУНТА В ПРОЦЕССЕ ПРОМЕРЗАНИЙ

(Представлена академиком НАН РК Ж. Байгунчековым)

Рассматривается кондуктивное распространение тепла в многослойном грунте. Предлагается приближенный метод с помощью, которой определяется коэффициент теплопроводности неоднородного грунта. Доказывается сходимость итерационного метода и приводится алгоритм вычислительного процесса.

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается кондуктивное распространения тепла в промерзающем многослойном грунте. В основу деления промерзающих грунтов на зоны был положен температурный признак. Это нашло свое отражение в том, что границами зон являются изотермы θ_0 и θ_1. Теплообмен между зонами происходит только на их границах, а внутри зон механизм распространения тепла остается таким же, как при отсутствии других зон. Поэтому можно написать систему уравнений теплопроводности:

$$\gamma_0 C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad 0 < z < h(t);$$

$$\gamma_0 C_\Phi \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_\Phi \frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad h(t) < z < h_1(t); \qquad (1)$$

$$\gamma_0 C_м \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_м \frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad h_1(t) < z < H.$$

Здесь индекс «т» показывает, что данная величина относится к талой зоне, «ф» - к зоне фазовых переходов, «м» - к зоне мерзлого грунта.

Положение изотерм θ_0 и θ_1 в пространстве остается переменным, так как температурное поле грунта меняется. Поэтому если обозначить через h координату z изотермы θ_0, а через h_1 – изотермы θ_1 то, вообще говоря, h, и h_1 будут функциями времени t. Взаимное тепловое влияние зон друг на друга заключается в том, что на подвижных границах $h(t)$ и $h_1(t)$ обязательно должны выполняться условия непрерывности поля температуры:

$$\left.\begin{aligned} z = h(t),\ T_T(h,t) = \theta,\ T_\Phi(h,t) = \theta \\ z = h_1(t),\ T_T(h_1,t) = \theta,\ T_\Phi(h_1,t) = \theta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и условия сохранения энергии:

$$z = h(t);\ \lambda_\Phi \frac{\partial T}{\partial z} - \lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} = p\frac{dh}{dt}, \qquad (3)$$

где $p = q_0 \gamma \Delta\omega_H$.

$$z = h_1(t);\ \lambda_M \frac{\partial T}{\partial z} - \lambda_\Phi \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Уравнения (1)-(3) образуют полную систему уравнений, так называемой **обобщенной задачи Стефана**, с помощью которой описывается процесс распространения тепла в промерзающих и протаивающих тонкодисперсных грунтах. Она имеет бесконечное количество решений. Для того чтобы выбрать из них те, которые описывают процесс распространения тепла именно в данном случае, необходимо ввести так называемые начально-краевые условия [1] (Гухман, 1934).

Чтобы определить состояние тела в некоторый момент времени, необходимо знать распределение температуры при $t = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} &h(0) = h_0 \ge 0,\ h_1(0) = h_0^* \ge 0, \\ &T_T(z,0) = f_T(z),\ 0 < z < h_0, \\ &T_\Phi(z,0) = f_\Phi(z),\ h_0 < z < h_0^*, \\ &T_м(z,0) = f_м(z),\ h_0^* < z < H. \end{aligned} \qquad (4)$$

Считаем, что на поверхности земли происходит обмен температуры с окружающей средой. Математически это условие записывается так:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial t}\bigg|_{z=H} + \alpha_b(\theta - T_b)\big|_{z=H} = 0,$$

где α_b и T_b соответственно коэффициент теплоотдачи в окружающую среду и температура окружающей среды. В данном случае в качестве

окружающей среды взят воздух. Для решения обратной задачи задается значения температуры грунта на поверхности земли. То есть

$$\theta(H,t)=\theta_1(t)\,. \qquad (5)$$

С учетом этого равенство граничного условия на поверхности грунта записывается так

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial t}\bigg|_{z=H}+\alpha_b\left(\theta_1(t)-T_b(t)\right)=0\,. \qquad (6)$$

Экспериментально установлено, что на некоторой глубине (от поверхности земли) температура грунта постоянная величина. То есть

$$T\big|_{z=0}=T_1=const\,. \qquad (7)$$

В итоге получена задача (1)-(7). Данная задача решается в неоднородной среде. Поэтому ставятся внутренние краевые условия на границах перехода от одной среды в другую, т.е.

$$\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z=z_i}=0\,,\quad [T]_{z=z_i}=0\,,\ i=1,2,...,k; \qquad (8)$$

где k - количество слоев неоднородного грунта, $[f]=f(z_i+0)-f(z_i-0)$ скачок функций в точках $z=z_i$. Следует отметить, что пространственное положение внутренних граничных условий (3) меняется в зависимости от времени, а пространственное положение условий (8) остается постоянным. Постановка задачи распространения тепла и некоторые экспериментальные данные хорошо описаны в работах [2, 3]. Математические свойства приближенного решения прямой задачи исследованы в работах [4-7]. Обратная задача промерзающего однородного грунта исследована в работах [8-10]. Требуется определить коэффициент теплопроводности $\lambda(z)$ многослойного промерзающего грунта.

2. Разностная схема. Отрезок $(0,H)$ разбиваем на n равных частей с шагом $h=H/N$; а отрезок $(0,T)$ - на m равных частей с шагом $\Delta t=T/m$. Сеточный аналог функции $\theta(z_i, t_j)$ обозначим через $Y_i^j=\overline{Y}$, а сеточный аналог $\theta(z_i,t_j+\Delta t)$ обозначим через $Y_i^{J+1}=Y$. В итоге получим сетку $Q_{h,\Delta t}=\{z_i=i\cdot h;$ $i=0,1,2,...,N;\ t_j=j\cdot\Delta t,\ \mathrm{j}=0,1,2,...,m\}$. В сеточной области рассмотрим задачу

$$\gamma_0 C(z_i)\frac{Y_i^{J+1}-Y_i^J}{\Delta t}=$$

$$=\frac{1}{h}\left(\lambda_{1+i}\frac{Y_{i+1}^{J+1}-Y_i^{J+1}}{h}-\lambda_i\frac{Y_i^{J+1}-Y_i^{J+1}}{h}\right), \qquad (9)$$

$$Y_0^{j+1}=0,\lambda_N\frac{Y_N^{j+1}-Y_{N-1}^{j+1}}{h}=-2(\theta_1^{j+1}-T_b^{j+1})\,, \qquad (10)$$

$$Y_i^0=\theta_0(z_i), i=0,1,2,...,N\,, \qquad (11)$$

где

$$C(z_i)=\overline{C}(z_i)+q_0\cdot\nu(z), i=1,2,...,n-1\,, \qquad (12)$$

$$\nu(z)=0,\quad \text{если}\quad Y>\Theta\quad \text{или}\quad Y<\Theta_1$$

$$\nu(z)\neq 0,\quad \text{если}\quad \Theta\le Y\le\Theta_1$$

$$\lambda(z)=\overline{\lambda}+q_0\gamma_0\beta(z). \qquad (13)$$

Коэффициент теплопроводности $\lambda(z)$ определяется итеративно. Через n-обозначен номер итераций. Из системы (6)-(11), также как в работе [9], получаем сопряженную задачу

$$\gamma_0 cU_{\bar t}+\left(\lambda\overline{U}_z\right)_z=0,\ i=1,2,...,N-1;$$

$$J=m-1,m-2,...,1; \qquad (14)$$

$$U_i^m=0,\ i=1,2,...,N; \qquad (15)$$

$$U_0^J=0,\lambda U_{N,\bar z}^J=-2(Y_N^{j+1}-\theta_1^{J+1}),$$

$$J=0,1,2,...,m-1; \qquad (16)$$

Коэффициент теплопроводности многослойного грунта определяется из минимума функционала:

$$J(\lambda)=\sum_{J=1}^{m}|\,\theta_1(t_j)-Y_N^{j+1}\,|^2\ \Delta t,$$

где $\theta_1(t)$ – температура грунта на поверхности земли, y_N^{j+1} - приближенное значение температуры грунта на поверхности земли. В работе для разности функционалов получена формула

$$J(\lambda_{n+1})-J(\lambda_n)=$$

$$=-\sum_i\beta(\sum_J Y_{\bar z}^{n+1}\overline{U}_{\bar z}^{\,n}\Delta t)^2h-\sum_J(\Delta Y_N)^2\Delta t\,. \qquad (17)$$

Правая часть знака равенства формулы (15) является не положительной, поэтому последовательность $\{J(\lambda_n)\}$ является монотонной, т.е.

$$J(\lambda_0) \geq J(\lambda_1) \geq J(\lambda_2) ... \geq J(\lambda_n) \geq ...$$

Тогда приближенное значение коэффициента теплопроводности грунта определяется по формуле:

$$\lambda_{n+1}(z_i) - \lambda_n(z_i) = -\beta \sum_j Y_{i,\bar{z}}^{n+1} \overline{U}_{i,\bar{z}}^{n} \Delta t$$

$$i = 0,1,2,....,n-1 \qquad , \quad (18)$$

В работе доказаны:

Теорема 1. Если $\theta_0(z) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_в(t) \in W_2^2(0,T)$ и $0 < C_0 \leq C(z) \leq \overline{C}_0 < \infty$, то для решения задач (9)-(13) справедливы оценки

$$\max_J \|Y_t\|^2 + \sum_J \left\|\sqrt{\lambda} Y_{\bar{x}t}\right\|^2 \Delta t \leq \left\|Y_t^0\right\|^2,$$

$$\max_i \|Y_t\| \leq \max_i \left|Y_t^0\right|.$$

Теорема 2. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_b(t) \in W_2^2(0,T)$ и $0 < C_0 \leq C(z) \leq \overline{C_0} < \infty$, то для решения задачи (14)–(16) справедлива оценка

$$\max_j \| U_t \|^2 + \sum_j \| \sqrt{\lambda} U_{\bar{z}t} \|^2 \Delta t \leq C_3 \left(1 + \sum_i \frac{h}{\lambda_i}\right).$$

Теорема 3. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_b(t) \in W_2^2(0,T)$ $0 < C_0 \leq C(z) \leq \overline{C}_0 < \infty$, то итерационный процесс (18) сходится и справедлива оценка

$$0 < C_4 \leq \lambda_{n+1}(z) \leq C_5 < \infty.$$

Теорема 4. Если $\theta_0(z) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_t(t) \in W_2^2(O,T)$, $0 < C_0 \leq C(z) \leq \overline{C}_0 < \infty$, то схема (9)-(13) является устойчивой по начальным данным и справедлива оценка

$$\max_j \left\|Y - \widetilde{Y}\right\| + \sum_j \left\|Y_{\bar{z}} - \widetilde{Y}_{\bar{z}}\right\|^2 \Delta t \leq C_7 \left\|\theta_0 - \widetilde{\theta}_0\right\|^2.$$

Где $\widetilde{Y}$ решение возмущенной задачи.

Теорема 5. Если решение дифференциальной задачи (1)-(8) обладает свойством $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \in L_2(Q)$, $\theta(t,z) \in W_2^1\left(0,T; W_2^2(0,H)\right)$, то решение приближенной задачи (9)-(13) сходится к решению исходной задачи (1)-(8) и справедлива оценка

$$\max_j \left\|\theta(t_j, z_i) - Y_i^j\right\|^2 + \sum_j \left\|\frac{\partial \theta}{\partial z} - Y_{i,z}^{j+1}\right\|^2 \Delta t \leq$$

$$\leq C_8 (h + \Delta t)^2.$$

На основе теоремы 1-3 доказываются:

Теорема 6. Последовательность $\{J(\lambda_n)\}$ является монотонно убывающей и ограничено сверху положительной константой.

3. Расчетная схема.

1. Задается начальное значение $\lambda_0(Z)$;

2. Вычисляются коэффициенты трехточечной схемы задачи (9) – (13):

$$A_{i+1} = \frac{\Delta t}{h^2} \lambda(z_{i+1}), \quad A_i = \frac{\Delta t}{h^2} \lambda(z_i),$$

$$B_i = A_{i+1} + A_i + \gamma_0 C(z_i),$$

$$F_i = \gamma_0 C(z_i) y_i^j; \; i = 1,2,...,N-1.$$

3. Начальные значения коэффициента метода скалярной прогонки $\overline{\alpha_1} = 0$, $\overline{\beta_1} = T_1$.

4. Вычисляются коэффициенты метода прогонки

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_{i+1}}{B_i - A_i \overline{\alpha_i}}, \quad \overline{\beta_{i+1}} = \frac{A_i \overline{\beta_i + F_i}}{B_i - A_i \alpha_i},$$

$$i = 1,2,...,N-1.$$

5. Вычисляется $Y_N^{j+1} = \dfrac{\overline{\beta}_N - E(\theta_1^{j+1} - T_b^{j+1})}{1 - \overline{\alpha}_N}$,

$$E = \frac{2h}{\lambda(z_N)}.$$

6. Вычисляются приближенные значения температуры

$$Y_{i-1}^{j+1} = \overline{\alpha}_i Y_i^{j+1} + \overline{\beta}_i, \; i = N, N-1, ..., 2.$$

7. Вычисляются коэффициенты потоковой прогонки

$$\alpha_i = 1 - \overline{\alpha}_i A_i, \; \beta_i = \overline{\beta}_i A_i; \quad i = 1,2,3,...,N.$$

8) Вычисляется граничное значение потока температуры $P_{N-1}^{j+1} = \beta_N - \alpha_N Y_N^{j+1}$.

9) Поток температуры определяется по рекуррентной формуле

$$P_{i-1}^{j+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + d_i} P_i^{j+1} + \frac{d_i \beta_i - \alpha_i F_i}{\lambda_i + d_i},$$

$$i = N, N\text{-}1, \ldots\ldots, 1.$$

Здесь $d_i = \gamma_0 C(z_i)$ и $P_{i-1}^{j+1} = A_i (Y_{i-1}^{j+1} - Y_I^{j+1})$.

10) Для решения сопряженной задачи положим $\overline{\alpha}_1 = 0$, $\overline{\beta}_1 = 0$.

11) Коэффициенты метода прогонки вычисляются по формуле

$$\overline{\alpha}_{i+1} = \frac{A_{i+1}}{B_i - A_i \overline{\alpha}_i}, \quad \overline{\beta}_{i+1} = \frac{A_i \overline{\beta}_i + F_i}{B_i - A_i \alpha_i},$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, N\text{-}1.$$

12) Вычисляется $U_N^j = \dfrac{\overline{\beta}_N - 2E(Y_N^{j+1} - \theta_1^{j+1})}{1 - \overline{\alpha}_N}$.

13) Вычисляются коэффициенты потоковой прогонки

$$\alpha_i = 1 - \overline{\alpha}_i A_i, \ \beta_i = 1 - \overline{\beta}_i A_i; \ i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, N.$$

14) Вычисляется граничное условие потока $\widetilde{P}_{N-1}^j = \beta_N - \alpha_N U_N^j$.

15) Поток решения сопряженной задачи (7)-(9) вычисляется по формуле

$$\widetilde{P}_{N-1}^j = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + d_i} \widetilde{P}_i^j + \frac{d_i \beta_i - \alpha_i F_i}{\alpha_i + d_i};$$

$$i = N\text{-}1, N\text{-}2, \ldots\ldots, 1. \ \widetilde{P}_{i-1}^J = A_i (U_{i-1}^J - U_i^J).$$

16) Следующее значение коэффициента теплопроводности вычисляется по формуле

$$\lambda_{n+1}(z_i) = \lambda_n(z_i) - \beta \sum_{j=1}^{N-1} P_i^{j+1} \widetilde{P}_i^j \Delta t.$$

17) Вычисляется функционал

$$J(\lambda_{n+1}) = \sum_{j=0}^{m-1} (Y_N^{j+1} - \theta_1^{j+1})^2 \Delta t.$$

18) Если $\left| \dfrac{J(\lambda_{n+1}) - J(\lambda_n)}{J(\lambda_{n+1})} \right| < \varepsilon$, то процесс вычисления прекращается и за приближенные значения $\lambda(z)$ берется $\lambda_{n+1}(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гухман А.А.* Физические основы теплопередачи. ОНТИ, 1934.

2. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). М., 1959. Под. ред. Н. А. Цытович. Гл. VI. С. 153-192.

3. *Чудновский А.Ф.* Теплобмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1954. 444 с

4. *Адамов А.А.* Процессы протаивания грунта // Доклады НАН РК. 2007. №1. С. 16-19.

5. *Жумагулов Б.Т., Рысбай?лы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

6. *Рысбай?лы Б., Адамов А.А.* Исследование теплопроводности фазовой зоны в многослойном грунте // Вестник НАН РК. 2007. №4. С. 30-33.

7. *Адамов А.А., Рысбай?лы Б.* Алгоритм численного решения задачи переноса тепла и влаги // Евразийский математический журнал. 2007. №3. С. 19-25.

8. *Рысбайулы Б.* Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неоднородной среде // Вестник КБТУ. 2008. №1. С. 62-65.

9. *Рысбайулы Б., Исмайлов А.О.* Определение коэффициента теплопроводности однородного грунта в процессе промерзаний // Доклады НАН РК. 2008. №2. С. 26-28.

10. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмайлов А.О.* Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний // Вестник НАН РК. 2008. №2. С. 7-9.

Резюме

Көпқабатты ортамен жылудың кондиктивті таралуы есебі зерттелген. Бейтекті ортаның жылутарату коэффициентін анықтайтын жуық тәсіл ұсынылады. Тәсілдің жинақтылығы дәлелденіп, есептеу процесінің алгоритмі келтірілген.

Summary

This work considers conductive distribution of heat in multilayer ground. The approached method is defined, which helps to define the coefficient of the thermal conduction in a non-uniform ground. The convergence of the iterative method is proved.

Поступила 10.06.08г.