УДК 519.62:624.131

Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. Т. БАЙМАНКУЛОВ

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ПОЧВЕННОЙ ВОДЫ

Изучается движение влаги в ненасыщенном грунте. Задается влага на поверхности земли. Выводится итерационная формула, с помощью которой определяется коэффициент диффузии почвенной воды.

1. Постановка задачи. В настоящей работе изучается система атмосфера–ненасыщенная зона–грунтовая вода. Движение воды в рассматриваемой системе имеет непрерывный характер. Теория движения воды в почве при изотермических условиях для ненабухающих и недеформирующихся грунтов основано на соотношении,

$$q = -K\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad (1)$$

которое выражает связь между потоком и градиентом потенциала переноса. Где q – удельный поток воды, K – коэффициент гидравлической проводимости почвы, Φ – потенциал переноса. Соотношение (1) было предложено на эмпирической основе Букингемом [1]. Аналитическая запись соотношения (1) была сформулирована Ричардсоном [2] и Чайлосом [3] в виде

$$q = -D\frac{\partial W}{\partial z} - K.$$

Здесь $D = K\dfrac{\partial \Psi}{\partial W}$ – коэффициент диффузии влаги.

Уравнение неразрывности для ненасыщенного потока можно представить в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right). \qquad (2)$$

В начальный момент распределение влаги задается. То есть

$$W(z,0) = W_0(z). \qquad (3)$$

На границе поверхности почвы и атмосферы задается граничное условие второго рода

$$\frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = A(t). \qquad (4)$$

На границе грунтовых вод с почвой задается первое граничное условие

$$W(0,t) = W_1 = \text{const}. \qquad (5)$$

Чтобы решить обратную задачу, т.е. найти, например, $D(z)$ мы должны ставить дополнительное условие. В нашем случае – это влага на поверх-ности почвы

$$W(H,t) = W_g(t),\ t \in [0,T]. \qquad (6)$$

Введем функцию $\overline{W}(z,t) = W(z,t) - W_1$. Легко проверить, что $\overline{W}(0,t) = 0$. Функцию $\overline{W}(z,t)$ снова обозначим через $W(z,t)$.

Задача (2)–(5) в области $Q = (0,H)\times(0,T)$ при заданном $D(z)$ имеет единственное устойчивое решение [4]. Методика решения обратной задачи кондуктивного распространения температуры разработана в работах [5, 6], а общая схема определения коэффициента диффузии на дифференциальном уровне изучена в работе [7]. В настоящей работе используя дополнительное условие (6) определяем функцию $D(z)$.

2. Разностная схема. В дискретной области $Q_N^m = \left\{z_i = i\cdot\Delta z,\ \mathrm{t_j} = j\cdot\Delta t \middle| N\cdot\Delta z = H;\ \mathrm{m}\cdot\Delta\mathrm{t} = \mathrm{T}\right\}$ ищется решение задачи

$$Y_i^{j+1} = \left(D(z_{i-1})Y_{\bar z}^{j+1}\right)_z + A(t_{j+1})D_{i,z} + zA'(t_{j+1}),$$
$$i = 1,2,\ldots,N;\ \mathrm{j} = 0,1,\ldots,\mathrm{m}-1. \qquad (7)$$

$$Y_0^j = 0,\ \mathrm{Y}_{\mathrm{N},\bar z}^{\mathrm{j}} = 0,\ \mathrm{Y}_{\mathrm{i}}^{0} = W_0(z_i). \qquad (8)$$

Задается начальное $D_n(z)$ и следующее приближение $D_{n+1}(z)$ определяется итерационным методом. Рассматривая разность $D_{n+1}(z) - D_n(z) = \Delta D$ получаем уравнение

$$\Delta Y_i^{j+1} = \qquad (9)$$
$$= \left(\Delta D(z_{i-1})\cdot \overset{n+1}{Y}_{i,\bar z} + D_n(z_{i-1})\Delta Y_{i,\bar z}^{j+1} + A^{j+1}\Delta D_i\right)_z;$$

$$\Delta Y_0^j = 0,\ \ \Delta Y_{N,\bar z}^j = 0,\ \ \Delta Y_i^0 = 0. \qquad (10)$$

Где $\overset{n+1}{Y_i}$ является решением задачи (9)-(10) при $D = D_{n+1}(z)$ и $\Delta Y_i^{j+1} = \overset{n+1}{Y_i} - \overset{n}{Y_i}$.

Умножим (9) на $U_i^j \Delta z \Delta t$, и суммируем, по всем внутренним узлам области Q_N^m. После применения формулы суммирования по частям

$$\sum_{i=1}^{N-1} U_i V_{i,z} = U_n V_n - U_0 V_1 - \sum_{i=0}^{N-1} V_{i+1} U_{i,z} \quad \text{при}$$

$$V_i = \Delta D(z_{i-1}) \cdot \overset{n+1}{Y_{i,\bar z}} + D_n(z_{i-1}) \Delta Y_{i,\bar z}^{j+1} + A^{j+1} \Delta D_i$$

имеем:

$$\sum_i \Delta Y_i^m U_i^m \Delta z - \sum_i \Delta Y_i^0 U_i^0 \Delta z - \sum_{i,j} \Delta Y_i^{j+1} U_i^{j+1} \Delta z \Delta t =$$

$$= \sum_j \left(\Delta D(z_{N-1}) \cdot \overset{n+1}{Y_{N,\bar z}} + D_n(z_{N-1}) \Delta Y_{N,\bar z} \right) U_N^j \Delta t -$$

$$- \sum_j \left(\Delta D(z_0) \cdot \overset{n+1}{Y_{1,\bar z}} + D_n(z_0) \Delta Y_{1,\bar z} + A^{j+1} D_1 \right) U_0^j \Delta t -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D(z_i) \cdot \overset{n+1}{Y_{i,z}} U_{i,z}^j \Delta t \Delta z -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{N-1} D_n(z_i) \Delta Y_{i,z} U_{i,z}^j \Delta t \Delta z -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} A^{j+1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D_i U_{i,z}^j \Delta z \Delta t .$$

Требуем, чтобы имело место равенства

$$U_i^m = 0, \; U_0^j = 0 .$$

Тогда, учитывая однородные граничные условия (9), имеем

$$- \sum_{i,j} \Delta Y_i^{j+1} U_i^{j+1} \Delta z \Delta t = - \sum_{j=0}^{m-1} A^{j+1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D_i U_{i,z}^j \Delta z \Delta t -$$

$$- \sum_j \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D(z_i) \cdot Y_{i,z}^{n+1} U_{i,z}^j \Delta z \Delta t -$$

$$- \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{N-1} D_n(z_i) \Delta Y_{i,z} U_{i,z}^j \Delta t \Delta z .$$

Суммируя по частям, последнюю сумму стоящей в правой части знака равенство, получаем, что

$$- \sum_{i,j} \Delta Y_i^{j+1} U_i^{j+1} \Delta z \Delta t = - \sum_{j=0}^{m-1} A^{j+1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D_i U_{i,z}^j \Delta z \Delta t -$$

$$- \sum_j \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D(z_i) \cdot Y_{i,z}^{n+1} U_{i,z}^j \Delta z \Delta t +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{N-1} \left(D_n(z_i) U_{i,z}^j \right)_{\bar z} \Delta Y_i \Delta t \Delta z -$$

$$- \sum_{j=0}^{m} D_n(z_{N-1}) \Delta Y_N U_{N,\bar z}^j \Delta t + \sum_{j=0}^{m} D_n(z_1) \Delta Y_0 U_{1,\bar z}^j \Delta t .$$

Так как $\Delta Y_0 = 0$. Поэтому, собирая подобные члены, получаем:

$$- \sum_{i,j} \Delta Y_i^{j+1} \left(U_i^{j+1} + \left(D_n(z_i) U_{i,z}^j \right)_{\bar z} \right) \Delta z \Delta t =$$

$$= - \sum_{j=0}^{m-1} A^{j+1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D_i U_{i,z}^j \Delta z \Delta t -$$

$$- \sum_j \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D(z_i) \cdot \overset{n+1}{Y_{i,z}} U_{i,z}^j \Delta z \Delta t .$$

Требуем, чтобы имели место равенства

$$U_i^{j+1} + \left(D_n(z_{i+1}) U_{i,z}^j \right)_{\bar z} = 0 .$$

Тогда

$$\sum_j D_n(z_{N-1}) U_{N,\bar z}^j \Delta Y_N \Delta t = - \sum_j \sum_{i=1}^{N-1} \Delta D(z_i) \times$$

$$\times \overset{n+1}{Y_{i,z}} U_{i,\bar z}^j \Delta z \Delta t - \sum_{j=0}^{m-1} A^{j+1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D_i U_{i,z}^j \Delta z \Delta t .$$

Если

$$D_n(z_{N-1}) U_{N,\bar z}^j = 2\left(Y_N^{j+1} - U_g(t_{j=1}) \right),$$

то

$$2 \sum_j \left(Y_N^{j+1} - U_g(t_{j=1}) \right) \Delta Y_N \Delta t =$$

$$= - \sum_j \sum_{i=1}^{N-1} \Delta D(z_i) \cdot \overset{n+1}{Y_{i,z}} U_{i,\bar z}^j \Delta z \Delta t -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} A^{j+1} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta D_i U_{i,z}^j \Delta z \Delta t . \qquad (10)$$

Приближенное значение коэффициента капиллярной диффузии определяется из минимума функционала

$$J(D)=\sum_{j=0}^{m-1}\left(Y_N^{j+1}-W_g(t_{j+1})\right)^2\Delta t\,.$$

Поэтому

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=$$

$$=2\sum_j\left(Y_N^{j+1}-U_g(t_{j=1})\right)\Delta Y_N^{j+1}\Delta t+\sum_j\left(\Delta Y_N^{j+1}\right)^2\Delta t\,.$$

Учитывая (10) перепишем его в виде

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=\sum_j\left(\Delta Y_N^{j+1}\right)^2\Delta t-$$

$$-\sum_j\sum_{i=1}^{N-1}\Delta D(z_i)\cdot\overset{n+1}{Y}_{i,z}U_{i,\bar z}^j\Delta z\Delta t-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}A^{j+1}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta D_iU_{i,z}^j\Delta z\Delta t\,.$$

Но $\overset{n+1}{Y}=\overset{n}{Y}+\Delta Y_i^{j+1}$, кроме того, введем обозначение $\overset{n}{Y}=Y_i^{j+1}$. Тогда

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N-1}\Delta D(z_i)\sum_j\left(Y_{i,\bar z}^{j+1}U_{i,\bar z}^j+A^{j+1}U_{i,\bar z}^j\right)\Delta z\Delta t-$$

$$-\sum_j\sum_{i=1}^{N-1}\Delta D(z_i)\cdot\Delta Y_{i,z}U_{i,\bar z}^j\Delta z\Delta t+\sum_j\left(\Delta Y_N^{j+1}\right)^2\Delta t\,.$$

Положим

$$\Delta D(z_i)=\beta_n(z_i)\sum_j\left(Y_{i,\bar z}^{j+1}U_{i,\bar z}^j+A^{j+1}U_{i,\bar z}^j\right)\Delta t;$$

$$\mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{N}-1\,.$$

Тогда

$$J(D_{n+1})-J(D_n)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N-1}\beta_n(z_i)\left(\sum_j\left(Y_{i,\bar z}^{j+1}U_{i,\bar z}^j+A^{j+1}U_{i,\bar z}^j\right)\Delta t\right)^2\Delta z-$$

$$-\sum_j\sum_{i=1}^{N-1}\Delta D(z_i)\cdot\Delta Y_{i,\bar z}^{j+1}U_{i,\bar z}^j\Delta z\Delta t+\sum_j\left(\Delta Y_N^{j+1}\right)^2\Delta t\,.$$

3. Алгоритм решения задачи.

3.1. Задается начальное приближение $D_n(z_i);\mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{N}$;

3.2. Решается прямая задача (7)-(8);

3.3. Решается сопряженная задача

$$U_i^{j+1}+\left(D_n(z_{i+1})U_{i,z}^j\right)_{\bar z}=0;$$

$$U_i^m=0,\ U_0^j=0,$$

$$D_n(z_N)U_{N,\bar z}^j=2\left(Y_N^{j+1}-U_g(t_{j=1})\right).$$

3.4. Следующее приближение коэффициента капиллярной диффузии определяется по формуле:

$$D_{n+1}(z_i)=D_n(z_i)+\beta_n(z_i)\times$$

$$\times\sum_j\left(Y_{i,\bar z}^{j+1}U_{i,\bar z}^j+A^{j+1}U_{i,\bar z}^j\right)\Delta t;\ \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{N}-1\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buckingham E.* Studies on movement of soil moisture. U. S. Dep. Agric. Bur. of Soils. (Washington). 1907. Bull. 38.

2. *Richards L.A.* Capillary conduction of liquids through medians // Physics. 1931. V. 1. P. 318-333.

3. *Childs E.D.* The transport of water through heavy clay soils. I, III // J. Ag. Sci. 1936. V. 26.

4. *Тиханов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1996. 724 с.

5. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК. 2008. №1. С. 11-13.

6. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О.* Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний // Вестник НАН РК. 2008. №2. С. 7-9.

7. *Байманкулов А.Т.* Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде // Изв. НАН РК. 2008. № 3. С. 45-47.

Резюме

Қанықпаған топырақтағы ылғалдың қозғалысы қарастырылады. Жер бетіндегі ылғал беріледі. Топырақ суының диффузия коэффициентін анықтайтын итерациялық тәсіл қорытылып шығарылды.

Summary

Is studied moisture movement in a no saturated ground. The moisture on an earth surface is set. The iterative formula with the help by which the factor of diffusion of soil water is defined is deduced.

Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы

Поступила 21.04.09г.