УДК 517.956.2

Г. К. РЗАЕВА

ОБ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПРЯМЫМИ И С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Получено одно многообразие непрерывных решений одной эллиптической системы второго порядка на плоскости с сингулярными прямыми и с сингулярной точкой. Решены задачи Робина для этой системы в бесконечной угловой области.

Пусть $0<\varphi_0\le 2\pi$, $\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<2\pi$, $G=\{z=re^{i\varphi}:\ 0\le r<\infty,\ 0\le\varphi\le\varphi_0\}$. Рассмотрим в области G уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\bar z\partial z}+\frac{a(\varphi)}{2\bar z}\frac{\partial V}{\partial\bar z}+\frac{b(\varphi)}{2z}\frac{\partial V}{\partial z}+$$
$$+\frac{c(\varphi)\overline{V}}{4(y-k_1x)^{\lambda}r^{2-\lambda}}+\frac{g(\varphi)V}{4|z^2|}=\frac{h(\varphi)r^{\alpha+\lambda-2}}{4(y-k_2x)^{\lambda}},\quad (1)$$

где $a(\varphi)$, $b(\varphi)$, $c(\varphi)$, $g(\varphi)$, $h(\varphi)\in C[0,\varphi_0]$; $0<\lambda<1$, $\alpha>2$ – действительные числа, $k_1=tg\varphi_1$, $k_2=tg\varphi_2$.

Уравнение (1) при $a(\varphi)=b(\varphi)=c(\varphi)=g(\varphi)=h(\varphi)=0$ рассмотрено в [1], где получено бесконечное множество линейно независимых решений однородной задачи Дирихле в единичном круге. При $\lambda=0$ уравнение (1) становится уравнением только с сингулярной точкой, которое также ранее не рассмотрено. Частные виды уравнения (1) имеют многочисленные применения в математической физике, дифференциальной геометрии и механике [1-3]. Дифференциальные операторы из (1) в полярной системе координат записываются в виде [4]:

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right),\quad \frac{\partial V}{\partial\bar z}=\frac{e^{-i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\bar z\partial z}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

Применяя эти формулы, уравнение (1) запишем в полярной системе координат

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+$$
$$+\frac{1}{r}(1+a(\varphi)e^{2i\varphi}+b(\varphi)e^{-2i\varphi})\frac{\partial V}{\partial r}+$$
$$+\frac{i}{r^2}(a(\varphi)e^{2i\varphi}-b(\varphi)e^{-2i\varphi})\frac{\partial V}{\partial\varphi}+$$
$$+\frac{c(\varphi)\overline{V}}{(\sin\varphi-k_1\cos\varphi)^{\lambda}r^2}+$$
$$+\frac{g(\varphi)V}{r^2}=\frac{h(\varphi)r^{\alpha-2}}{(\sin\varphi-k_2\cos\varphi)^{\lambda}},\quad (2)$$

Решения уравнения (1) из класса

$$W_p^2(G)\cap C(G),\quad p>1.\quad (3)$$

будем искать в виде

$$V(r,\varphi)=r^{\alpha}\Psi(\varphi),\quad (4)$$

где $\Psi(\varphi)$ – новая неизвестная функция из класса $C^2[0,\varphi_0]$.

Подставив функцию, заданную по формуле (4) в уравнение (2), получим

$$\Psi''+(ia(\varphi)e^{2i\varphi}-ib(\varphi)e^{-2i\varphi})\Psi'+$$
$$+(\alpha^2+\alpha a(\varphi)e^{2i\varphi}+\alpha b(\varphi)e^{-2i\varphi}+g(\varphi))\Psi=$$
$$=\frac{h(\varphi)}{(\sin\varphi-k_2\cos\varphi)^{\lambda}}-\frac{c(\varphi)\overline{\Psi(\varphi)}}{(\sin\varphi-k_1\cos\varphi)^{\lambda}}.\quad (5)$$

Пусть $\Psi_1(\varphi)$, $\Psi_2(\varphi)$ – фундаментальная система решений уравнения (5) при $h(\varphi)=c(\varphi)=0$, которая существует в силу того, что коэффициенты уравнения (5) при

$h(\varphi) \equiv c(\varphi) \equiv 0$ непрерывны в $[0, \varphi_0]$. Используя функции $\Psi_1(\varphi)$, $\Psi_2(\varphi)$, методом вариации произвольных постоянных уравнение (5) приводим к интегральному уравнению

$$\Psi(\varphi) = (B\Psi)(\varphi) + c_1 J_0(\varphi) + c_2 I_0(\varphi) + F_0(\varphi), \quad (6)$$

где

$$(B\Psi)(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{\Psi(\gamma)}d\gamma, \quad J_0(\varphi) = \Psi_1(\varphi),$$

$$I_0(\varphi) = \Psi_2(\varphi), \quad F_0(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(\varphi,\gamma)d\gamma,$$

$$b(\varphi,\gamma) = \frac{c(\gamma)(\Psi_1(\varphi)\Psi_2(\gamma) - \Psi_1(\gamma)\Psi_2(\varphi))}{\Delta(\gamma)(\sin\gamma - k_1\cos\gamma)^{\lambda}},$$

$$f(\varphi,\gamma) = \frac{h(\gamma)(\Psi_2(\varphi)\Psi_1(\gamma) - \Psi_1(\varphi)\Psi_2(\gamma))}{\Delta(\gamma)(\sin\gamma - k_2\cos\gamma)^{\lambda}},$$

$$\Delta(\gamma) = \Psi_1(\gamma)\Psi_2'(\gamma) - \Psi_1'(\gamma)\Psi_2(\gamma).$$

Как вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (5) при $\Delta(\varphi) \neq 0$ для всех $\varphi \in [0, \varphi_0]$. Из условий $0 < \lambda < 1$, $\Delta(\varphi) \neq 0$ вытекает, что несобственные интегралы, определяющие функции $(B\Psi)(\varphi)$ и $F_0(\varphi)$, сходятся.

Далее, используем следующие функции и операторы:

$$(B^0\Psi)(\varphi) = \Psi(\varphi),$$

$$(B^1\Psi)(\varphi) = (B\Psi)(\varphi),$$

$$(B^k\Psi)(\varphi) = (B^{k-1}\Psi)(\varphi),$$

$$J_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{J_{k-1}(\gamma)}d\gamma,$$

$$I_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{I_{k-1}(\gamma)}d\gamma,$$

$$F_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{F_{k-1}(\gamma)}d\gamma,$$

$$(k = \overline{1,\infty}).$$

Действуя оператором B на равенство (6), получаем новое выражение для $(B\Psi)(\varphi)$, которое обратно подставляем в (6):

$$\Psi(\varphi) = (B^2\Psi)(\varphi) + c_1 J_0(\varphi) + c_2 I_0(\varphi) + \\ + \overline{c_1} J_1(\varphi) + \overline{c_2} I_1(\varphi) + F_0(\varphi) + F_1(\varphi). \quad (7)$$

Вновь действуя оператором B на равенство (7), получим новое выражение для $(B\Psi)(\varphi)$, которое снова подставляем в (6):

$$\Psi(\varphi) = (B^3\Psi)(\varphi) + c_1(J_0(\varphi) + J_2(\varphi)) + \\ + \overline{c_1} J_1(\varphi) + c_2(I_0(\varphi) + I_2(\varphi)) + \overline{c_2} I_1(\varphi) + \\ + F_0(\varphi) + F_1(\varphi) + F_2(\varphi).$$

Продолжая эту процедуру $2n - 1$ раз, получим интегральное представление для $\Psi(\varphi)$:

$$\Psi(\varphi) = (B^{2n}\Psi)(\varphi) + c_1\sum_{k=0}^{n} J_{2k}(\varphi) + \overline{c_1}\sum_{k=1}^{n} J_{2k-1}(\varphi) + \\ + c_2\sum_{k=0}^{n} I_{2k}(\varphi) + \overline{c_2}\sum_{k=1}^{n} I_{2k-1}(\varphi) + \sum_{k=0}^{2n-1} F_k(\varphi). \quad (8)$$

Имеют место следующие легко проверяемые оценки:

$$\left|(B^k\Psi)(\varphi)\right| \le |\Psi|_0 \frac{(|b|_1\varphi)^k}{k!},$$

$$|J_k(\varphi)| \le |\Psi_1|_0 \frac{(|b|_1\varphi)^k}{k!}, \quad |I_k(\varphi)| \le |\Psi_2|_0 \frac{(|b|_1\varphi)^k}{k!}\varphi,$$

$$|F_k(\varphi)| \le |f|_1 \frac{(|b|_1\varphi}{k!}\varphi, \quad (9)$$

где $|b|_1 = \max\limits_{0\le\varphi,\gamma\le\varphi_0} |b(\varphi,\gamma)|$, $|\Psi|_0 = \max\limits_{0\le\varphi\le\varphi_0} |\Psi(\varphi)|$.

Переходя к пределу в (8) при $n \to \infty$, используя при этом оценки (9), получим

$$\Psi(\varphi) = c_1 P_2(\varphi) + \overline{c_1} P_1(\varphi) + \\ + c_2 Q_2(\varphi) + \overline{c_2} Q_1(\varphi) + F(\varphi), \quad (10)$$

где

$$P_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(\varphi), \quad P_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\varphi),$$

$$Q_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(\varphi), \quad Q_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k}(\varphi),$$

$$F(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\varphi).$$

Используя неравенства (9), оценим функции $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $Q_1(\varphi)$, $Q_2(\varphi)$, $F(\varphi)$:

$$|P_1(\varphi)| \le |\Psi_1|_0\, sh(|b|_1\varphi), \quad |P_2(\varphi)| \le |\Psi_1|_0\, ch(|b|_1\varphi),$$

$$|Q_1(\varphi)| \le |\Psi_2|_0\, sh(|b|_1\varphi), \quad |Q_2(\varphi)| \le |\Psi_2|_0\, ch(|b|_1\varphi),$$

$$|F(\varphi)| \le |f|_1 \exp(|b|_1\varphi).$$

Из формул (4) и (10) следует

$$V(r,\varphi)=r^{\alpha}(c_1P_2(\varphi)+\overline{c_1}P_1(\varphi)+$$

$$+c_2Q_2(\varphi)+\overline{c_2}Q_1(\varphi)+F(\varphi)). \qquad (11)$$

Используя свойства функций $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $Q_1(\varphi)$, $Q_2(\varphi)$, $F(\varphi)$ можно показать, что функция $V(r,\varphi)$, определяемая по формуле (11), принадлежит классу (3) и удовлетворяет уравнению (1). Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет многообразие решений из класса (3), которые определяются по формуле (11).*

Теперь рассмотрим краевые задачи типа Робина для уравнения (1).

Задача R_1. *Найти решение уравнения (1) в классе (3), удовлетворяющее граничным условиям*

$$V(r,0)=\beta_1 r^{\alpha}, \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi}(r,0)=\beta_2 r^{\alpha}, \qquad (12)$$

где β_1, β_2 – действительные, $\alpha>2$ заданное действительное числа.

Решение задачи. Для решения задачи используем формулу (11). Из вида функции $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$, $Q_1(\varphi)$, $Q_2(\varphi)$, $F(\varphi)$ следует

$$P_1(0)=Q_1(0)=F(0)=0,$$
$$P_2(0)=\Psi_1(0),$$
$$Q_2(0)=\Psi_2(0),$$
$$P_1'(0)=Q_1'(0)=F'(0)=0,$$
$$P_2'(0)=\Psi_1'(0),$$
$$Q_2'(0)=\Psi_2'(0). \qquad (13)$$

Если подставим функцию $V(r,\varphi)$, заданную по формуле (11), в граничные условия (12), то с учетом (13) получим

$$c_1\Psi_1(0)+c_2\Psi_2(0)=\beta_1,$$
$$c_1\Psi_1'(0)+c_2\Psi_2'(0)=\beta_2. \qquad (14)$$

Так как функции $\Psi_1(\varphi)$, $\Psi_2(\varphi)$ составляют фундаментальную систему решений, то $\Delta(0)\neq 0$ для всех $\varphi\in[0,\varphi_0]$. Поэтому алгебраическая система (14) имеет решение:

$$c_1=\frac{\beta_1\Psi_2'(0)-\beta_2\Psi_2(0)}{\Delta(0)},$$
$$c_2=\frac{\beta_2\Psi_1(0)-\beta_1\Psi_1'(0)}{\Delta(0)}. \qquad (15)$$

Полученные значения c_1, c_2 подставляем в (11), получим решение в виде

$$V(r,\varphi)=\frac{r^{\alpha}}{\Delta(0)}((\beta_1\Psi_2'(0)-\beta_2\Psi_2(0))P_2(\varphi)+$$
$$+(\beta_1\overline{\Psi_2'(0)}-\beta_2\overline{\Psi_2(0)})P_1(\varphi)+$$
$$+(\beta_2\Psi_1(0)-\beta_1\Psi_1'(0))Q_2(\varphi)+$$
$$+(\beta_2\overline{\Psi_1(0)}-\beta_1\overline{\Psi_1'(0)})Q_1(\varphi)+F(\varphi)). \qquad (16)$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2. *Задача R_1 имеет единственное решение в виде (4), которое определяется по формуле (16).*

Задача R_2. *Найти решение уравнения (1) в классе (3), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\alpha_1V(r,0)+\alpha_2\frac{\partial V}{\partial\varphi}(r,0)=\beta_1 r^{\alpha},$$
$$\alpha_3V(r,0)+\alpha_4\frac{\partial V}{\partial\varphi}(r,0)=\beta_2 r^{\alpha}, \qquad (17)$$

где α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, α – действительные числа.

Решение задачи. Для решения задачи R_2 используем формулу (11). Поэтому параметр α подчиним условию: $\alpha>2$. Функцию $V(r,\varphi)$, заданную по формуле (11), подставляя в граничные условия (17), имеем:

$$c_1\Psi_1(0)(\alpha_1+\alpha_2)+c_2\Psi_2(0)(\alpha_1+\alpha_2)=\beta_1, \qquad (18)$$
$$c_1\Psi_1'(0)(\alpha_3+\alpha_4)+c_2\Psi_2'(0)(\alpha_3+\alpha_4)=\beta_2.$$

Рассмотрим четыре случая.

а) пусть $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$, $\alpha_3+\alpha_4\neq 0$.

Так как $\Delta(0)\neq 0$, то решение этой системы существует и определяется по формулам

$$c_1=\frac{1}{\Delta(0)}\left(\frac{\beta_1\Psi_2'(0)}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\beta_2\Psi_2(0)}{\alpha_3+\alpha_4}\right),$$

$$c_2=\frac{1}{\Delta(0)}\left(\frac{\beta_2\Psi_1(0)}{\alpha_3+\alpha_4}+\frac{\beta_1\Psi_1'(0)}{\alpha_1+\alpha_2}\right).$$

Полученные значения c_1, c_2 подставим в (11):

$$V(r,\varphi)=\frac{r^{\alpha}}{\Delta(0)}((\frac{\beta_1\Psi_2'(0)}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\beta_2\Psi_2(0)}{\alpha_3+\alpha_4})P_2(\varphi)+$$

$$+(\frac{\beta_2\Psi_1(0)}{\alpha_3+\alpha_4}+\frac{\beta_1\Psi_1'(0)}{\alpha_1+\alpha_2})Q_2(\varphi)+$$

$$+(\frac{\beta_1\overline{\Psi_2'(0)}}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{\beta_2\overline{\Psi_2(0)}}{\alpha_3+\alpha_4})P_1(\varphi)+$$

$$+(\frac{\beta_2\overline{\Psi_1(0)}}{\alpha_3+\alpha_4}+\frac{\beta_1\overline{\Psi_1'(0)}}{\alpha_1+\alpha_2})Q_1(\varphi))+r^{\alpha}F(\varphi). \quad (19)$$

б) пусть $\alpha_1+\alpha_2=0, \quad \alpha_3+\alpha_4\neq 0$. Тогда из (18) следует $\beta_1=0$,

$$c_1=\frac{\beta_2}{\Psi_1'(0)(\alpha_3+\alpha_4)}-c_2\frac{\Psi_2'(0)}{\Psi_1'(0)},$$

c_2 – произвольное число.

Полученные значения c_1, c_2 подставим в (11):

$$V(r,\varphi)=r^{\alpha}((\frac{\beta_2}{\Psi_1'(0)(\alpha_3+\alpha_4)}-c_2\frac{\Psi_2'(0)}{\Psi_1'(0)})P_2(\varphi)+$$

$$+(\frac{\beta_2}{\overline{\Psi_1(0)}(\alpha_3+\alpha_4)}-c_2\frac{\overline{\Psi_2'(0)}}{\overline{\Psi_1'(0)}})P_1(\varphi)+$$

$$+c_2Q_2(\varphi)+\overline{c_2}Q_1(\varphi)+F(\varphi)). \quad (20)$$

в) пусть $\alpha_1+\alpha_2\neq 0, \quad \alpha_3+\alpha_4=0$. Тогда из (18) следует $\beta_2=0$,

$$c_1=\frac{\beta_1}{\Psi_1(0)(\alpha_1+\alpha_2)}-c_2\frac{\Psi_2(0)}{\Psi_1(0)},$$

c_2 – произвольное число.

Полученные значения подставим в (11):

$$V(r,\varphi)=r^{\alpha}((\frac{\beta_1}{\Psi_1(0)(\alpha_1+\alpha_2)}-c_2\frac{\Psi_2(0)}{\Psi_1(0)})P_2(\varphi)+$$

$$+(\frac{\beta_1}{\overline{\Psi_1(0)}(\alpha_1+\alpha_2)}-\overline{c_2}\frac{\overline{\Psi_2(0)}}{\overline{\Psi_1(0)}})P_1(\varphi)+$$

$$+c_2Q_2(\varphi)+\overline{c_2}Q_1(\varphi)+F(\varphi)). \quad (21)$$

г) пусть $\alpha_1+\alpha_2=0, \quad \alpha_3+\alpha_4=0$. Тогда из (18) следует $\beta_1=0, \quad \beta_2=0$. В этом случае задачи R_2 имеют бесконечное множество решений, которые находятся по формуле (19). Таким образом, справедлива теорема:

Теорема 2.6. *1) при $\alpha_1+\alpha_2\neq 0, \quad \alpha_3+\alpha_4\neq 0$ задача R_2 имеет единственное решение в виде (4), которое определяется по формуле (19).*

2) при $\alpha_1+\alpha_2=0, \quad \alpha_3+\alpha_4\neq 0$ задача R_2 разрешима только тогда, когда $\beta_1=0$. При $\beta_1=0$ задача R_2 имеет бесконечно много решений, которые определяются по формуле (20).

3) при $\alpha_1+\alpha_2\neq 0, \quad \alpha_3+\alpha_4=0$ задача R_2 разрешимо только тогда, когда $\beta_2=0$. При $\beta_2=0$ задача R_2 имеет бесконечно много решений, которые определяются по формуле (21).

4) при $\alpha_1+\alpha_2=0, \quad \alpha_3+\alpha_4=0$ для решения задачи достаточно выполнения равенства: $\beta_1=\beta_2=0$. При выполнении этих условий задача R_2 имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формуле (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

2. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: ГИФМЛ, 1959. 616 с.

3. *Усманов З.Д.* Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw, 1984. V. 12. P. 241-272.

4. *Тунгатаров А.Б., Алтынбек С.А.* Задача Дирихле для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Фукса // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. Сер. естественно-технических наук. 2006. № 6(52). С. 21-28.

Резюме

Жазықтықта берілген сингулярлық түзулермен мен сингулярлық нүктесі бар екінші ретті эллиптикалық жүйенің үзіліссіз шешімдерінің бір кепбейнесі алынған. Осы жүйе үшін ақырсыз бұрыштық облыста Робин есептері шешілген.

Summary

In this paper given one variety continuous solution of second order elliptic system in the plane with singular line and point. The problems of Robin for this system in the infinite angular domain is solved.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 24.09.10г.