А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, А. А. ТЕНГАЕВА

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент)

КРИТЕРИЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация

В настоящей работе установлены различные критерий самосопряжености регулярного оператора Штур-ма–Лиувилля.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, самосопряженный оператор, критерий самосопряжен-ности.

Кілт сөздер: Штурм–Лиувилл операторы, өзара байланысты оператор, өзара байланыстылықтың крите-рийлері.

Keywords: operator Sturm–Liouville, self-adjoint operator, the criterion of self-adjointness.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x);\ \ x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0\ \ (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми краевыми условиями, где $a_{ij}(i = 1,2;\ j = 1,2,3,4)$ – произ-вольные комплексные постоянные.

Задача

$$Ly = \lambda y,\ \ U_i[y] = 0\ (i = 1,2) \tag{3}$$

называется задачей на собственные значения. Она называется самосопряженной, если

$$(Lu, v) = (u, Lv) \tag{4}$$

для всех $u, v \in C^2$ на [0,1], которые удовлетворяют краевым условиям

$$U_i[u] = U_i[v] = 0\ \ (i = 1,2).$$

Если здесь $f, g \in L^2(0,1)$, то

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\,\bar{g}(t)dt.$$

Число (f, g) называется скалярным произведением функций f и g, и $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ есть норма функций в $L^2(0,1)$.

Если коэффиценты граничных условий (2) действительные величины, то задача Штурма–Лиувилля самосопряженна, тогда и только тогда, когда, имеет место равенство $\Delta_{1,2} = \Delta_{3,4}$ [1, с. 293], где $\Delta_{i,j}$-миноры, составленные из i-го и j -го столбцов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}a_{24} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Если коэффиценты a_{ij} комплекснозначны, то критерий самосопряженности, как нам кажется, имеет громоздкий вид [2, с. 323].

Постановка задачи. Найти легко проверяемые критерии самосопряженности оператора Штурма–Лиувилля (1)-(2).

Работа состоит из трех частей, основные результаты изложены без доказательств, в третьей части, во второй части изложены вспомогательные утверждения, с помощью которых получены основные результаты. Доказательство этих утверждений элементарны, хотя несколько громоздки.

2. Вспомогательные предложения

Лемма 1. *Если*

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} \neq 0, \quad (6)$$

то краевая задача Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y^{''}(x) = f(x); \;\; x \in (0,1) \quad (7)$$

$$U_i[y] = 0 \; (i = 1,2) \quad (8)$$

разрешима для любой непрерывной функции $f(x)$ на интервале [0,1] *и решение имеет вид*

$$y(x) = L^{-1}f(x) = \int_0^x \frac{-\Delta_{13}\, x \times t - (\Delta_{12} + \Delta_{32})x + (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14})t + \Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} f(t)dt$$

$$+ \int_x^1 \frac{-\Delta_{13} x \times t - (\Delta_{32} + \Delta_{34})t + (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{34})x + \Delta_{32} + \Delta_{42}}{\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34}} f(t)\, dt,$$

где L^{-1}-обратный оператор к оператору L.

Лемма 2. *Если имеет место неравенство (6), то сопряженный оператор к обратному оператору L^{-1} имеет следующий вид*

$$(L^{-1})^* g(x) = \int_0^1 G^*(x,t) g(t)\, dt,$$

где

$$G^*(x,t) \begin{cases} \dfrac{\Delta_{13} x \times t - \overline{(\Delta_{34} + \Delta_{32})}x + \overline{(\Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{34})}t + \bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{42}}{\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{13} + \bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{34}}, 0 \leq t \leq x \\ \dfrac{-\Delta_{13} x \times t - \overline{(\Delta_{12} + \Delta_{32})}t + \overline{(\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14})}x + \bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{42}}{\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{13} + \bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32} + \bar{\Delta}_{34}}, x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

где $\Delta_{i,j}$-миноры матрицы (5).

Лемма 3. *Если оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) является обратимым в пространстве H, то сопряженный оператор L* имеет следующий вид:*

$$L^{*}z = -z''(x); x \in (0,1)$$

$$U_1^*[z] = \bar{\Delta}_{13} z(0) + \left(\overline{\Delta_{32}+\Delta_{34}}\right) z'(0) - \bar{\Delta}_{13} z(1) - \left(\overline{\bar{\Delta}_{12}+\bar{\Delta}_{14}}\right) z'(1) = 0,$$

$$U_2^*[z] = \left(\overline{\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{34}}\right) z(0) + \left(\overline{\Delta_{32}+\Delta_{42}}\right) z'(0) + \left(\overline{\Delta_{12}+\Delta_{32}}\right) z(1) - \left(\overline{\Delta_{12}+\Delta_{24}}\right) = 0,$$

где $\Delta_{i,j}$ $(i,j = 1,2,3,4)$*-миноры, составленные из i-го и j-го столбцов граничной матрицы (5).*

3. Основные результаты

Теорема 1. *Если имеет место неравенство (6), то задача Штурма-Лиувилля (3) самосопря-жена тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}} = \frac{\bar{\Delta}_{13}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}},$$

$$\frac{\Delta_{12}+\Delta_{32}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}} = \frac{\bar{\Delta}_{34}+\bar{\Delta}_{32}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}},$$

$$\frac{\Delta_{32}+\Delta_{42}}{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}} = \frac{\bar{\Delta}_{32}+\bar{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}}$$

Теорема 2. *Если имеет место неравенство (6) и равенства:*

1) $\bar{\Delta}_{13} = \Delta_{13}$; *2)* $\bar{\Delta}_{32} = \Delta_{32}$; *3)* $\bar{\Delta}_{14} = \Delta_{14}$; *4)* $\bar{\Delta}_{24} = \Delta_{24}$; *5)* $\Delta_{12} = \bar{\Delta}_{34}$,

то задача Штурма-Лиувилля(3)самосопряжена.

Теорема 3. *Если задача Штурма-Лиувилля (3) самосопряжена в пространстве H, то*

$$|\Delta_{42}| + |\Delta_{14}+\Delta_{32}| + |\Delta_{13}| \neq 0.$$

при этом:

а) *если* $\Delta_{42} \neq 0$, *то*

$$\frac{\Delta_{14}+\Delta_{32}}{\Delta_{42}} = \frac{\overline{\Delta_{14}+\Delta_{32}}}{\bar{\Delta}_{42}}, \qquad \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{42}} = \frac{\bar{\Delta}_{13}}{\bar{\Delta}_{42}}, \qquad \frac{\Delta_{12}+\Delta_{34}}{\Delta_{42}} = \frac{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{34}}}{\bar{\Delta}_{42}};$$

б) *если* $\Delta_{14} + \Delta_{32} \neq 0$, *то*

$$\frac{\Delta_{42}}{\Delta_{14}+\Delta_{32}} = \frac{\bar{\Delta}_{42}}{\overline{\Delta_{14}+\Delta_{32}}}, \qquad \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{14}+\Delta_{32}} = \frac{\bar{\Delta}_{13}}{\overline{\Delta_{14}+\Delta_{32}}}, \frac{\Delta_{12}+\Delta_{34}}{\Delta_{14}+\Delta_{32}} = \frac{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{34}}}{\overline{\Delta_{14}+\Delta_{32}}};$$

в) *если* $\Delta_{13} \neq 0$, *то*

$$\frac{\Delta_{42}}{\Delta_{13}} = \frac{\bar{\Delta}_{42}}{\bar{\Delta}_{13}}, \qquad \frac{\Delta_{14}+\Delta_{32}}{\Delta_{13}} = \frac{\overline{\Delta_{14}+\Delta_{32}}}{\bar{\Delta}_{13}}, \qquad \frac{\Delta_{12}+\Delta_{34}}{\Delta_{13}} = \frac{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{34}}}{\bar{\Delta}_{13}}.$$

Теорема 4.

(а) *если* $\Delta_{42} \neq 0$, *то для самосопряженности обратимого оператора Штурма–Лиувилля необ-ходимо и достаточно выполнение следующих условий*

$$\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{42}}=\frac{\bar{\Delta}_{34}}{\bar{\Delta}_{42}},\qquad \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{42}}=\frac{\bar{\Delta}_{13}}{\bar{\Delta}_{42}},\qquad \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{42}}=\frac{\bar{\Delta}_{14}}{\bar{\Delta}_{42}},\qquad \frac{\Delta_{32}}{\Delta_{42}}=\frac{\bar{\Delta}_{32}}{\bar{\Delta}_{42}};$$

(б) *если* $\Delta_{42} = 0$ *и* $\Delta_{13} \neq 0$, *то для самосопряженности обратимого оператора Штурма-–Лиу-вилля необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\frac{\Delta_{32}}{\Delta_{13}}=\frac{\bar{\Delta}_{32}}{\bar{\Delta}_{13}},\qquad \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}}=\frac{\bar{\Delta}_{14}}{\bar{\Delta}_{13}},\qquad \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}=\frac{\bar{\Delta}_{34}}{\bar{\Delta}_{13}};$$

(в) *если* $\Delta_{42} = 0$, $\Delta_{13} = 0$ *и* $\Delta_{14} + \Delta_{32} \neq 0$, *то для самосопряженности обратимого оператора Штурма–Лиувилля необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{14}+\Delta_{32}}=\frac{\bar{\Delta}_{34}}{\overline{\Delta_{14}+\Delta_{32}}},\qquad \frac{\Delta_{32}}{\Delta_{14}+\Delta_{32}}=\frac{\bar{\Delta}_{32}}{\overline{\Delta_{14}+\Delta_{32}}}.$$

Теорема 5. *Если имеет место неравенство (6), то задача Штурма–Лиувилля (3) самосопря-жена в пространстве H, тогда и только тогда, когда*

1) $\bar{\Delta}_{13}= e^{-2i\varphi}\Delta_{13}$; *2)* $\bar{\Delta}_{12}= e^{-2i\varphi}\Delta_{34}$; *3)* $\bar{\Delta}_{32}= e^{-2i\varphi}\Delta_{32}$; *4)* $\bar{\Delta}_{24}= e^{-2i\varphi}\Delta_{24}$; *5)* $\bar{\Delta}_{14}= e^{-2i\varphi}\Delta_{14}$,

где $e^{-2i\varphi} = \frac{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}{\overline{\Delta_{12}+\Delta_{13}+\Delta_{14}+\Delta_{32}+\Delta_{34}}}$.

Теорема 6. *Задача Штурма-Лиувилля (3) самосопряжена в пространстве H тогда и только тогда, когда*

1) $|\Delta_{24}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| \neq 0$;

2) $\bar{\Delta}_{12}= e^{i\alpha}\Delta_{34}$; *3)* $\bar{\Delta}_{13}= e^{i\alpha}\Delta_{13}$; *4)* $\bar{\Delta}_{14}= e^{i\alpha}\Delta_{14}$;

5) $\bar{\Delta}_{24}= e^{i\alpha}\Delta_{24}$; *6)* $\bar{\Delta}_{32}= e^{i\alpha}\Delta_{32}$, *где* $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $\Delta_{i,j}$*-миноры матрицы (5).*

ЛИТЕРАТУРА

1 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939. – 717 с.

2 Коддингтон Э.Л., Левинсон Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.

REFERENCES

1 Ince *E.L.* Ordinary Differential Equations. – Kharkov, 1939. – 717 p.

2 Coddington E.L., Levinson N. Ordinary differential equations. – M.: IL, 1958. – 474 p.

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, А. А. Тенгаева

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.)

ШТУРМ–ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ӨЗ-ӨЗІНЕ ТҮЙІНДЕСТІГІНІҢ ҮЗІЛДІ-КЕСІЛДІ ШАРТТАРЫ

Бұл еңбекте Штурм–Лиувилл тұрақты операторының өзара байланыстылығының критерийлері табылды.

Кілт сөздер: Штурм–Лиувилл операторы, өзара байланысты оператор, өзара байланыстылықтың крите-рийлері.

Summary

A. Sh. Shaldanbaev, A. A. Tengaeva

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent)

CRITERION OF SELF-ADJOINT STURM–LIOUVILLE

In the present paper, different criteria of self-adjoint regular Sturm-Liouville problem.

Keywords: operator Sturm–Liouville, self-adjoint operator, the criterion of self-adjointness.

Поступила 3.04.2013г.