

УДК 517.9

С.З. САЛАКОВА

О ЗАДАЧАХ КОШИ И КОШИ – ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННОЙ С СИСТЕМОЙ БИЦАДЗЕ

Приведен метод решения задачи Коши и задачи Коши-Дирихле для неклассической системы уравнений.

Как мы знаем, задача Дирихле для эллиптической системы уравнений с частными производными второго порядка Бицадзе [1].

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

является некорректно поставленной в круге, в (1) функция $U = u + iv$ принимает комплексные значения, $z = x + iy$, а $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

как нестационарную систему от двух независимых переменных, исследуем задачу Коши для системы (2)

$$U|_{t=0} = U_0(x, y), \quad U_t|_{t=0} = U_1(x, y),$$

$$U_j(x, y) = u_j(x, y) + iV_j(x, y), \quad j = 0, 1. \quad (3)$$

Постановка задачи: требуется найти решение $U(x, t)$ уравнения (2) в области $t > 0$, удовлетворяющее начальным условиям (3), где

$U_0(x, y)$, $U_1(x, y)$ - бесконечно дифференцируемые заданные функции переменных x, y и дополнительно потребуем, чтобы ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^n}{(2n)!} U_0(x, y),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t}{(2n+1)!} \left(t^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^n U_1(x, y) \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него почленным дифференцированием дважды по x, y и t сходятся равномерно.

Сначала задачу (2) - (3) с помощью замены

$$U(x, y, t) = V(x, y, t),$$

$$\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} = W(x, y, t) \quad (5)$$

приведем к следующей задаче: требуется найти комплекснозначную вектор-функцию

$$S(x, y, t) = (V(x, y, t), W(x, y, t))$$

являющейся решением следующей системы,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = TS, \quad (6)$$

и удовлетворяющей начальным условиям

$$S(x, y, 0) = S_0(x, y), \quad (7)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0(x, y) = \begin{pmatrix} U_0(x, y) \\ U_1(x, y) \end{pmatrix}$$

так как, в силу (5),

$$\frac{\partial V}{\partial t} = W, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Далее применяя экспоненциально-дифференциальный оператор [2]

$$\exp\left(-t \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

к уравнению (6), получим

$$S - t \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{t^2}{2!} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \dots = S_0(x, y). \quad (9)$$

Она получается следующим образом

$$\begin{aligned}
 S(x, y, t) &= S(x, y, 0) + \\
 &+ \int_{(x, y, 0)}^{(x, y, t)} \frac{\partial S}{\partial t} dt = S_0(x, y) + t \frac{\partial S}{\partial t} - \\
 &\int_{(x, y, 0)}^{(x, y, t)} t \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dt = \dots = \\
 &= S_0(x, y) + t \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{t^2}{2!} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} - \frac{t^4}{4!} \frac{\partial^4 S}{\partial t^4} + \dots,
 \end{aligned}$$

следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \frac{\partial^n S}{\partial t^n} = S_0(x, y). \quad (10)$$

Аналогично (6)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = T \frac{\partial S}{\partial t} = T^2 S, \dots, \quad \frac{\partial^k S}{\partial t^k} = T^k S, \dots,$$

тогда (10) можем записать в следующем виде

$$(I - tT + \frac{t^2 T^2}{2!} - \frac{t^3 T^3}{3!} + \dots)S = S_0(x, y), \quad (11)$$

$$\text{где } I \text{ -- единичная матрица, а } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned}
 T^2 &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} I, \quad T^3 = T \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\
 T^4 &= T^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^4}{\partial z^4} I, \dots. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Используя равенства (12), записываем (11) в следующем виде

$$\begin{aligned}
 &I(1 + \frac{t^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{t^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \dots)S = T \\
 &(t + \frac{t^3}{3!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{t^5}{5!} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \dots)S = S_0(x, y). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Теперь как в работе [2] вводим следующее матричное обозначение

$$A = I \operatorname{ch}\left(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right) - T \frac{\operatorname{sh}\left(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right)}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}}, \quad (14)$$

то (13) имеет вид

$$AS = S_0(x, y). \quad (15)$$

Если через A^{-1} обозначим обратную матрицу к матрице A , то из выражения (14) определим обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = I \operatorname{ch}\left(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right) - T \frac{\operatorname{sh}\left(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right)}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}}.$$

Подействуя матрицей A^{-1} слева к системе (15), получим $S = A^{-1} S_0$ или в матричном виде

$$S = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}) & \operatorname{sh}(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}) \\ \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}} \operatorname{sh}(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}) & \operatorname{ch}(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0(x, y) \\ U_1(x, y) \end{pmatrix}.$$

Тогда решение задачи (2) и (3) дается формулой

$$\begin{aligned}
 U(x, y, t) &= \operatorname{ch}(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}) U_0(x, y) + \\
 &+ \frac{\operatorname{sh}(t \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}})}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}} U_1(x, y). \quad (16)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 U(x, y, t) &= \\
 &= (1 + \frac{1}{2!} t^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{4!} t^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \dots + \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}} + \dots) \\
 &U_0(x, y) + \\
 &+ (t - \frac{1}{3!} t^3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{5!} t^5 \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \dots + \\
 &\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}} + \dots) U_1(x, y) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^n}{(2n!)} U_0(x, y) + \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!} \left(t^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^n U_1(x, y). \end{aligned}$$

В данной работе мы получили решение задачи Коши (2) и (3), которое выражается по формуле (16).

Рассмотрим пример, с простыми начальными условиями

$$U|_{t=0} = |z|^2, \quad U_t|_{t=0} = 1$$

для системы (2) задачу Коши, данную задачу можем быстро решить по формуле (16), так как

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = 0.$$

Тогда по формуле (16) решение задачи

$$U(x, y, t) = z\bar{z} + t.$$

Задачу Коши-Дирихле об определении регулярного в полупространстве $t > 0$ решения

$U(x, y, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (17)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (18)$$

если $f(x, y)$ произвольная бесконечно дифференцируемая функция и следующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}} f(x, y)$$

можно почленно дифференцировать нужное число раз, данную задачу так же можем решить предложенным методом.

В данном случае, применяя экспоненциально-дифференциальный оператор

$$\exp\left(-t \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

к задаче (17) -(18), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \frac{\partial^n u}{\partial t^n} = f(x, y),$$

так как,

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial^{2n} u}{\partial z^{2n}},$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial z^{2n}} = f(x, y),$$

или

$$e^{-\frac{t^2}{\partial z^2}} u = f(x, y).$$

Из этого получаем,

$$u = e^{\frac{t^2}{\partial z^2}} f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial z^{2n}}. \quad (19)$$

Рассмотрим пример, нужно найти решение задачи Коши-Дирихле

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad u|_{t=0} = z \cos \bar{z}. \quad (20)$$

Решение задачи (20) определяется по формуле (19) и выражается в следующем виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= z \cos \bar{z} - t z \cos \bar{z} + \frac{t^2}{2!} z \cos \bar{z} - \frac{t^3}{3!} z \cos \bar{z} \\ &= (1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots) z \cos \bar{z} = e^{-t} z \cos \bar{z}. \end{aligned}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (2) – (3). Для этого вводя новые переменные z_1, z_2 [3] в виде

$$z_1 = x + \frac{1}{2}t + i2y, \quad z_2 = x - \frac{1}{2}t + i2y,$$

однородную задачу (2) – (3) приведем к следующей задаче: требуется определить решение системы

$$u_{z_1} u_{z_2} = 0, \quad (21)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (22)$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Сначала найдем общее решение (21):

$$u = F(x + \frac{1}{2}t + i2y) + G(x - \frac{1}{2}t + i2y).$$

Используя условий (22), имеем

$$F(z) + G(z) = 0, \quad F'(z) - G'(z) = 0.$$

Отсюда

$$F(z) = C, G(z) = -C.$$

Следовательно,

$$u = 0.$$

Следует отметить, что в работе [3] утверждалось о неккоректности задачи (2) – (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966, 204с.
2. Маукеев Б.И. Дифференциалды тендеулерді шешү. А.: Мектеп, 1989, 231с.

3. Ермаков В.И. Дифференциальные уравнения. Т. 15, №2 (1979).

Резюме

Классикалық емес тендеулерге арналған Коши және Коши-Дирихле есептерін шешу өнді келтірілген.

Summary

Method of solving Cushy and Cushy- Dirichle problems for none classical system of equations are given in this work.

*Казахский национальный университет
им. аль – Фараби,
г. Алматы, Казахстан*