УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

УСЛОВИЯ БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ В ТЕРМИНАХ L_p-НОРМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell u = p_0(x)\,u'' + p_1(x)\,u' + p_2(x)\,u \qquad (1)$$

и некоторыми краевыми или нелокальными условиями на произвольном конечном интервале $G = (a,b)$. Для наших исследований конкретный вид краевых условий не играет особой роли. Поэтому выражение (1) мы будем называть формально несамосопряженным дифференциальным оператором, коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям С:

– для некоторой внутренней точки $x_0 \in G$ вещественнозначный коэффициент $p_0(x) \geq \alpha > 0$ абсолютно непрерывен вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$;

– для той же точки $x_0 \in G$ комплекснозначный коэффициент $p_1(x)$ абсолютно непрерывен на каждом отрезке $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$;

– комплекснозначный коэффициент $p_2(x) \in L_1(a,b)$.

Поскольку нас не интересует явный вид краевых условий, то собственные и присоединенные функции оператора L мы будем понимать в обобщенном смысле В. А. Ильина [1], а именно, системой обобщенных корневых функций (ОКФ) оператора L назовем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, каждая из которых абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на замкнутых интервалах $[c, x_0]$ и $[x_0, d]$ ($a < c < x_0 < d < b$), для некоторого λ_k почти всюду в (a, x_0) и (x_0, b) удовлетворяет уравнению

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1} \qquad (2)$$

и в точке разрыва x_0 удовлетворяет условиям сопряжения

$$u_k(x_0 - 0) = u_k(x_0 + 0), \qquad (3)$$

$$p_0(x_0 - 0)\cdot u_k'(x_0 - 0) = \\ = p_0(x_0 + 0)\cdot u_k'(x_0 + 0) + \beta\, u_k(x_0 + 0), \qquad (4)$$

где β – некоторая постоянная, $\theta_k = 0$, либо $\theta_k = 1$ (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), $\theta_1 = 0$.

При $\theta_k = 0$ функцию $u_k(x)$ называем обобщенной собственной функцией, а при $\theta_k = 1$ – обобщенной присоединенной функцией.

Оператор, формально сопряженный к оператору L, обозначим следующим образом

$$L^*\upsilon = (p_0\upsilon)'' - (\overline{p}_1\upsilon)' + \overline{p}_2\upsilon .$$

Предположим, что система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к ОКФ $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ оператора L^*.

Будем считать, что система ОКФ $\{u_k(x)\}$ пронумерованы так, что вслед за каждой обобщенной собственной функцией стоят все входящие вместе с ней в одну цепочку обобщенные присоединенные функции. Тогда ОКФ $\upsilon_k(x)$ сопряженного оператора определяются как абсолютно непрерывные функции вместе со своей первой производной в интервалах $[c, x_0]$ и $[x_0, d]$, $(a < c < x_0 < d < b)$, удовлетворяющие условиям, аналогичным условиям (3) и (4), возможно с другой константой β, и удовлетворяющие почти всюду в (a, x_0) и (x_0, b) уравнениям

$$L^*\upsilon_k + \overline{\lambda}_k\upsilon_k = \theta_{k+1}\upsilon_{k+1},$$

где числа λ_k и θ_k те же, что и в уравнении (2).

В работе [2] В. Д. Будаевым установлен следующий результат.

Теорема (В. Д. Будаев). Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям С. Пусть выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера $k = 1,2,3...$

$$|\operatorname{Im}\mu_k| \le M_1, \tag{5}$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\operatorname{Re}\mu_k \ge 0$.

Тогда для безусловной базисности в $L_2(G)$ каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств для всех номеров k

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le M_2, \tag{6}$$

$$\|u_k(x)\|_{L_2(G)} \cdot \|\upsilon_k(x)\|_{L_2(G)} \le M_3 . \tag{7}$$

Условие (7) обычно называют условием базисности В. А. Ильина. Необходимость условия (7) для произвольных базисов, вообще говоря, не связанных с дифференциальным оператором, известна давно [3. С. 372].

Пусть y – произвольная точка интервала $[x_0, b)$. Введем новую переменную

$$t(x) = \int_y^x p_0^{-1/2}(s)ds$$

и на интервале $[t(x_0), t(b)]$ рассмотрим функции $\omega_k(t)$, определенные равенством

$$u_k(x) = \gamma_1(x) \cdot \omega_k(t), \ k = 1,2,3,...,$$

где

$$\gamma_1(x) = \left(\frac{p_0(x)}{p_0(y)}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_y^x \frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds\right).$$

Легко проверить, что

$$Lu_k = \gamma_1(x) \cdot [\omega_k''(t) + q_1(t)\omega_k(t)]$$

и, следовательно, функции $\omega_k(t)$ являются ОКФ оператора

$$L_1\omega = \omega'' + q_1\omega,$$

заданного на интервале $(t(x_0), t(b))$ с потенциалом $q_1(t) \in L_1$.

Таким образом, для функций $\omega_k(t)$ на интервале $(t(x_0), t(b))$ справедливы оценки, полученные В. В. Тихомировым в работе [4].

Совершенно аналогично можно убедиться в справедливости результатов работы [4] на интервале $(t(a), t(x_0))$.

Так как $u_k(x) = \gamma_1(x) \cdot \omega_k(t)$, то, пользуясь видом функции $\gamma_1(x)$ и условиями сопряжения (3), убеждаемся в справедливости результатов работы [4] для функции $u_k(x)$ на интервалах (x_0, b) и (a, x_0).

Итак, мы убедились, что для ОКФ оператора L вида (1) справедливы следующие оценки [4], которые при выполнении условия (5) имеют вид

$$c_1\| u_k(x)\|_{L_q(G)} \le \| u_k(x)\|_{L_S(G)} \le c_2\| u_k(x)\|_{L_q(G)}, \quad (8)$$

где $1 \le q \le s \le +\infty$.

Оценки (8) играют важную роль при доказательстве следующей установленной нами теоремы, которая и является основным результатом настоящего статьи.

Теорема. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условиям С. Пусть также выполняются следующие два условия:

– система $\{\upsilon_k(x)\}$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора L^*;

– последовательность $\{\mu_k\}$ не имеет конечных точек сгущения и существует константа M_1 такая, что для любого номера $k = 1,2,3,...$

$$|\mathrm{Im}\,\mu_k| \le M_1,$$

где $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из комплексного числа λ_k, для которого $\mathrm{Re}\,\mu_k \ge 0$.

Тогда для базисности Рисса каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ необходимо и достаточно выполнение нижеследующих неравенств для всех номеров k:

$$\sum_{t \le |\mu_k| \le t+1} 1 \le M', \ \forall t \ge 0, \quad (9)$$

$$0 < \alpha_1 \le \|u_k(x)\|_{L_p(G)} \le \beta_1,$$

$$0 < \alpha_2 \le \|v_k(x)\|_{L_p(G)} \le \beta_2, \quad (10)$$

для любого p, $1 \le p \le \infty$.

Доказательство. Если выполнены условия теоремы и системы $\{u_k(x)\}$, $\{\upsilon_k(x)\}$ являются базисами Рисса, то справедливость неравенств (10) сразу вытекают из (8). Необходимость условия (9) доказана в теореме В.Д. Будаева.

Пусть теперь выполнены (10) и (9) (или что то же самое (6)). В неравенстве (8) полагаем $q = p$, $s = \infty$. Тогда из правой половины неравенств (8) получим

$$\| u_k(x)\|_{L_\infty(G)} \le c_2\| u_k(x)\|_{L_p(G)} \le c_2\beta_1,$$

$1 \le p \le \infty$, т.е. равномерную ограниченность L_∞-норм функций $u_k(x)$.

В силу того, что неравенства типа (8) справедливы и для элементов биортогонально сопряженной системы $\{\upsilon_k(x)\}$, то мы имеем выполнение условий типа (7) и условия (9) (или что то же самое (6)). По теореме В. Д. Будаева системы $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ образуют безусловный базис в $L_2(G)$. По условию (10) наши системы почти нормированы. Поэтому, по теореме Лорча [3. С. 381] системы $\{u_k(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ образуют базис Рисса. Теорема доказана.

Аналогичные результаты для других дифференциальных операторов второго порядка получены в работе [5].

Автор выражает искреннюю признательность всем участникам научного семинара под руководством д-ра физ.-мат. наук М. А. Садыбекова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048-1053.

2. *Будаев В.Д.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 6. С. 941-952.

3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

4. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807-810.

5. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Доклады НАН РК. 2006. № 1. С. 44-48.

Резюме

Түпкілікті функциялардың Рисс базис болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар сол функциялардың кез келген L_p кеністігіндегі нормалары үшін орындалатын теңсіздіктер түрінде берілген.

Summary

Criterion of Riss basisnes of root functions in L_p-norms terms of these functions have been got in the work.

ЮКГУ

Поступила 2.05.07г.