

УДК 621.01

К. З. САРТАЕВ

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА

*(Представлена академиком НАН РК Ж. Байгунчековым)*

Описывается конкретный пространственный параллельный манипулятор, устанавливаются исходные предположения, и по заданным геометрическим параметрам звеньев проводится кинематический анализ манипулятора матричным методом Денавита–Хартенберга.

В последнее время возрос интерес к теории пространственных параллельных манипуляторов (ППМ) [1–3].

Матричный метод [4–6], используемый в данной работе, удобен вследствие общности аналитического подхода; кроме того, он может быть запрограммирован для машинного счета.

Исследуемый ППМ [2] состоит только из вращательных кинематических пар (КП) (рис. 1). КП на рисунке пронумерованы жирными цифрами. Длины звеньев принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_8 = l_{10} = 0,3 \text{ м}, \quad l_4 = l_6 = 2l_2 \text{ м}, \\ l_2 &= l_5 = l_7 = l_{11} = l_1\sqrt{2} \text{ м}, \\ l_{c_y} &= l_{c_x} = l_{c_z} = l_{c_1} = l_{c_2} = l_{c_3} = 2l_1 \text{ м}. \end{aligned} \quad (1)$$

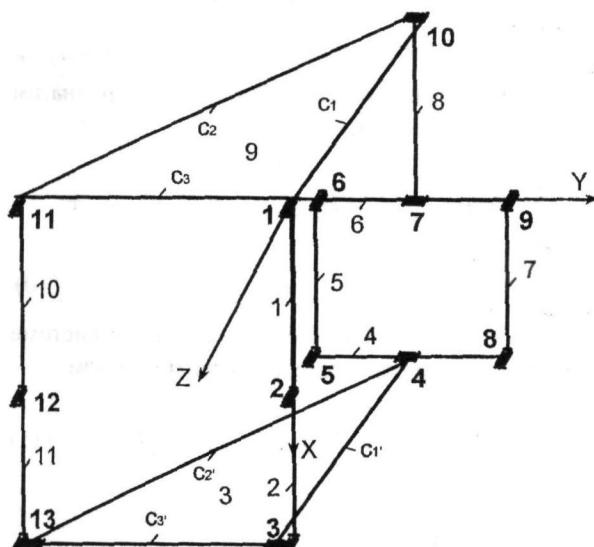


Рис. 1. Пространственный параллельный манипулятор

Инерциальная система координат  $XYZ$  жестко соединена звеном 9. Так как манипулятор имеет  $m=3$  степеней свободы, то в ППМ имеются  $(N-m)$  зависимых углов  $q$  для вращательной КП, где  $N$  – число КП.

В работах [4, 7] матричный метод использован при решении задач кинематики одноконтурных пространственных механизмов. В общем случае манипулятор может иметь произвольное число контуров  $L$ , произвольное число степеней свободы  $m$ . Каждый контур состоит из  $n_j$  звеньев,  $j = 1, \dots, L$  – число контуров. Приведенный на рис. 1 ППМ состоит из двух контуров.

В работе приняты следующие обозначения:  $W_{ji}$ ,  $W_{j(i+1)}$  – характерные оси вращения сочленений, имеющихся на двух концах звена  $(j,i)$ ;  $t_{j(i+1)}$  – общий перпендикуляр, направленный от  $W_{ji}$  к  $W_{j(i+1)}$ ;  $U_{j(i+1)}$  – ось, образованная  $t_{j(i+1)}$ . Если же оси  $W_{ji}$  и  $W_{j(i+1)}$  пересекаются, то ориентацию оси  $U_{j(i+1)}$  можно выбрать произвольно;  $V_{ji}$ ,  $V_{j(i+1)}$  – оси, которые вместе с осями  $U_{ji}$ ,  $W_{ji}$ ,  $U_{j(i+1)}$ ,  $W_{j(i+1)}$  образуют правые декартовы системы координат.

Геометрию любого звена ППМ относительно предыдущего звена при известных размерах можно описать шестью параметрами [4–6]:  $a_{j(i+1)}$  – расстояние от оси  $W_{ji}$  до оси  $W_{j(i+1)}$ , измеряемое по направлению  $t_{j(i+1)}$ ;  $\alpha_{j(i+1)}$  – угол между положительными направлениями  $W_{ji}$  и  $W_{j(i+1)}$  измеряемый против хода часовой стрелки относительно положительного направления  $t_{j(i+1)}$ ;  $b_{j(i+1)}$  – расстояние от направления  $t_{j(i+1)}$  до направления оси  $U_{j(i+1)}$ , измеряемое по положительному направлению  $W_{j(i+1)}$ ;  $\beta_{j(i+1)}$  – угол между положительными направлениями  $t_{j(i+1)}$  и оси  $U_{j(i+1)}$ , измеряемый против хода часовой стрелки относительно положительного направления оси  $W_{j(i+1)}$ ;  $s_{j(i+1)}$  – расстояние от направления оси  $U_{ji}$  до направления

$t_{ji(i+1)}$ , измеряемое по положительному направлению  $W_{ji}$ ;  $\theta_{ji(i+1)}$  – угол между положительными направлениями оси  $U_{ji}$  и  $t_{ji(i+1)}$ , измеряемый против хода часовой стрелки относительно положительного направления оси  $W_{ji}$ ;  $i = 1, \dots, n$  – число звеньев в каждом контуре.

Достаточно точные начальные оценки и начальные данные этих параметров для исследуемого ППМ (см. рис. 1) представлены таким образом:

$$a_1(1) = a_2(1) = a_1(8) = a_2(8) = l_1, \quad a_2(9) = l_{c_1},$$

$$a_1(2) = a_2(2) = a_1(6) = a_2(6) = a_2(7) = l_2;$$

$$a_1(4) = a_2(4) = a_2(5) = l_{c_1} \cos(\psi/2) \text{ м};$$

$$\alpha_1(3) = \alpha_2(3) = \alpha_1(5) = \alpha_1(9) = \alpha_2(6) = 270^\circ,$$

$$\alpha_1(7) = 90^\circ;$$

$$b_1(4) = b_2(4) = -l_{c_1}/2 \text{ м}, \quad b_1(7) = l_6/2 \text{ м},$$

$$b_1(9) = l_{c_1} \cos(\psi/2) \text{ м};$$

$$\beta_1(3) = \beta_2(3) = \beta_1(4) = \beta_2(4) = 90^\circ,$$

$$\beta_1(9) = \beta_2(5) = \beta_2(8) = \beta_2(9) = 270^\circ;$$

$$\theta_2(5) = 90^\circ; \quad \theta_j(k) = \bar{\theta}_j(k), \quad k = 2, \dots, 8,$$

$$s_1(5) = s_2(5) = -l_4/2 \text{ м}, \quad s_1(9) = -l_{c_1}/2 \text{ м}. \quad (2)$$

Система координат  $U_{j1}V_{j1}W_{j1}$  совпадает с осьми XYZ.

Относительное положение  $U_{ji}V_{ji}W_{ji}$  и  $U_{ji(i+1)}V_{ji(i+1)}W_{ji(i+1)}$  осуществляется матрицей  $T_{ji(i+1)}$  [3]:

$$\begin{aligned} \left[ T_{ji(i+1)} \right] &= \left[ T_{W_{ji}} \right] \left( s_{ji(i+1)} \right) \left[ T_{W_{ji(i+1)}} \right] \left( \theta_{ji(i+1)} \right) \times \\ &\times \left[ T_{U_{ji(i+1)}} \right] \left( a_{ji(i+1)} \right) \left[ T_{U_{ji(i+1)}} \right] \left( \alpha_{ji(i+1)} \right) \times \\ &\times \left[ T_{I_{ji(i+1)}} \right] \left( b_{ji(i+1)} \right) \left[ T_{W_{ji(i+1)}} \right] \left( \beta_{ji(i+1)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку ППМ состоит из нескольких замкнутых контуров, то можно записать следующее матричное соотношение, решение которого позволяет осуществить исчерпывающий анализ положений:

$$A_{j1}A_{j2}A_{j3} \dots A_m = I, \quad (4)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Для любого положения механизма величина  $\theta_{ji}$  известна как входные углы, где  $m$  – число степеней свободы. Необходимо определить остальные переменные величины  $\theta_{ji(i+1)}$  итерационным методом:

$$\theta_{ji(i+1)} = \bar{\theta}_{ji(i+1)} + d\theta_{ji(i+1)}, \quad (5)$$

где  $i$  – число зависимых параметров;  $\bar{\theta}_{ji(i+1)}$  – начальная оценка;  $d\theta_{ji(i+1)}$  – ошибка  $\bar{\theta}_{ji(i+1)}$  по отношению к точной величине.

Подставляя (5) в (4), получаем

$$B_{j2} + B_{j3} + \dots + B_{j(n-1)} \cong I - B_{j1}. \quad (6)$$

Здесь

$$B_{j1} = A_{j1}\bar{A}_{j2}\bar{A}_{j3} \dots A_{jn}, \quad (7)$$

$$B_{ji} = (A_{ji}\bar{A}_{j2} \dots \bar{A}_{j(i-1)} \frac{\partial A_{ji}(\theta_{ji})}{\partial \theta_{ji}} \bar{A}_{ji} \dots \bar{A}_{j(n-1)} A_{jn}) d\theta_{ji}.$$

Основное уравнение (6) решается относительно величин  $d\theta_{ji(i+1)}$ .

Матрица  $Q_j = \partial A_{ji}(\theta_{ji}) / \partial \theta_{ji}$  порядка  $4 \times 4$  для вращательной КП является кососимметрической [4–6], т.е.  $Q_{j23} = -1$ ,  $Q_{j32} = 1$ . Остальные элементы этой матрицы равны нулю.

Приравнивая соответствующие элементы правой и левой части уравнения (6) и исключая некоторые из уравнений как тождество или как избыточную часть системы, получаем матрицу  $9 \times (n_{ji} - 2)$ . Обозначая коэффициенты  $B_{ji}$  через  $M_j$ , неизвестные  $d\theta_{ji(i+1)}$  через  $D_j$ , постоянные  $B_{j1}$  через  $V_j$ , уравнение (6) можно записать в следующей форме:

$$M_j D_j = V_j. \quad (8)$$

Умножая слева обе части уравнения (8) на транспонированную матрицу  $M_j$ , получаем [4]:

$$M'_j M_j D_j = M'_j V_j. \quad (9)$$

Матрица  $D_j$  содержит  $(N-m)$  неизвестных членов  $d\theta_{ji(i+1)}$ .

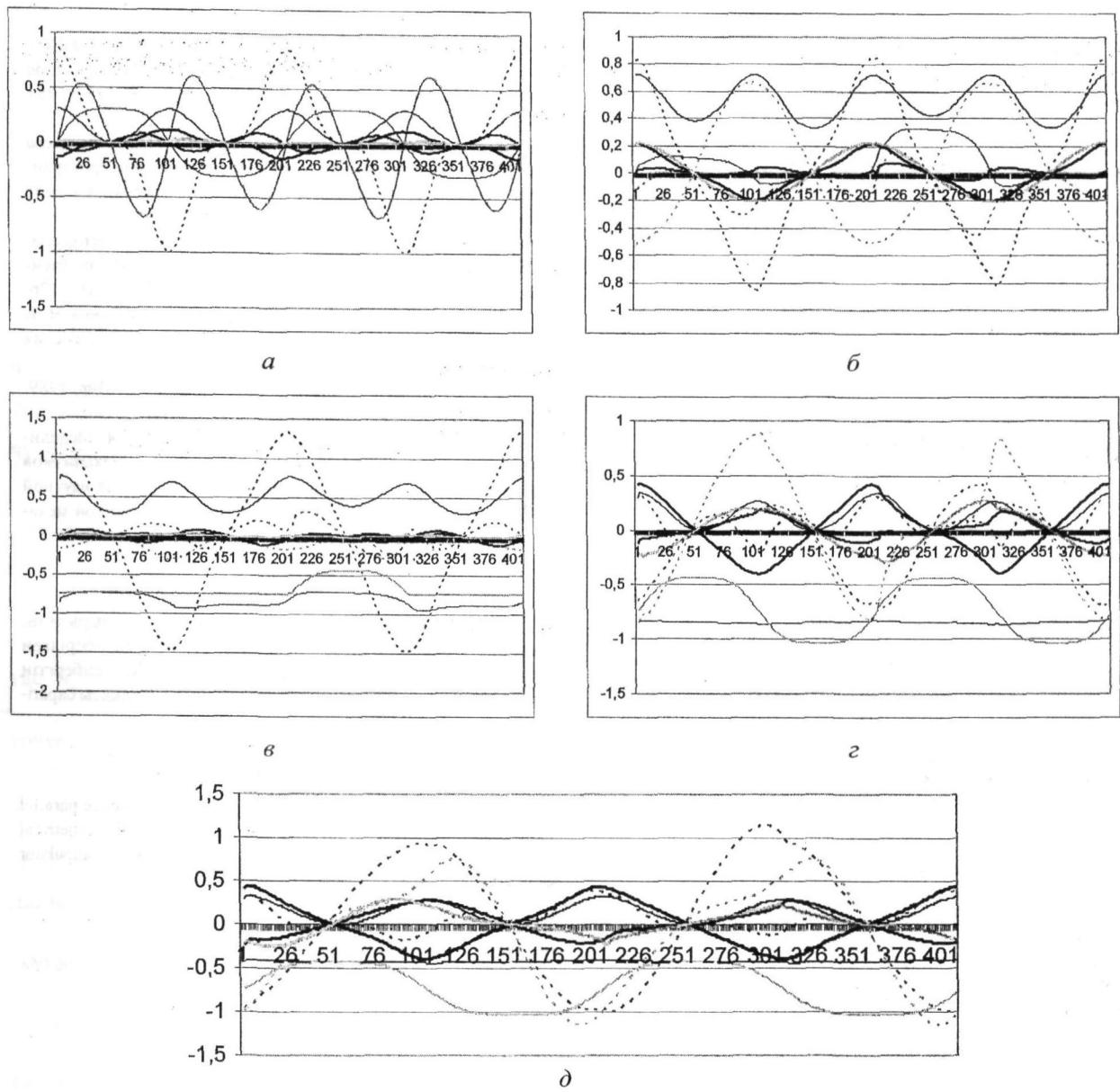
Координаты КП манипулятора в инерциальной системе координат определяются элементами первого столбца матрицы  $T_{ji(i+1)}$ .

Определяем обобщенные скорости точек  $q'_{h(j,i)p}$  ППМ, дифференцируя по обобщенным координатам матричное соотношение (4):

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{n_{ji}-2} B_{ji} q'_{h(j,i)p} &= - \left( B_{j1} q'_{h(j,1)p} + B_{j2} q'_{h(j,2)p} + \right. \\ &\quad \left. + B_{j8} q'_{h(j,8)p} + B_{j9} q'_{h(j,9)p} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Скорости точек ППМ в инерциальной системе координат определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ji} &= \left[ T_{ji(i+1)} \right] \sum_{d=1}^{n_j} B_{jd} q'_{h(j,d)p} \times \dot{q}_p r_{ji} = \\ &= \left[ T_{ji(i+1)} \right] \left[ B_{jp} + \sum_{d=3}^{n_{ji}-2} B_{jd} q'_{h(j,d)p} \right] \times \dot{q}_p r_{ji}, \end{aligned} \quad (11)$$



Кривые полных перемещений, скоростей, ускорений узлов:

- |     |                      |     |                      |
|-----|----------------------|-----|----------------------|
| —   | перемещение по оси x | —   | скорость по оси x    |
| ··· | ускорение по оси x   | —   | перемещение по оси y |
| —   | скорость по оси y    | ··· | ускорение по оси y   |
| —   | перемещение по оси z | —   | скорость по оси z    |
| ··· | ускорение по оси z   | ··· | ускорение по оси z   |

**Рис. 2.** Изменения перемещений, линейных скоростей и ускорений точек сочленения звеньев ППМ по времени:  
узла 2 (*a*), узла 3 (*b*), узла 5 (*c*), узла 6 (*d*), узла 7 (*e*)

где  $r_j$  – координаты точек ППМ в локальной системе координат;  $\dot{q}_p$  – заданные скорости точек манипулятора.

Находим обобщенные ускорения точек ППМ, дифференцируя по обобщенным координатам матричное соотношение (10):

$$\sum_{i=3}^{n_j-2} B_{ji} q''_{h(j,i)p} = \quad (12)$$

$$= -B_{jp}^2 - \sum_{i=3}^{n_j-2} \sum_{d=3}^{n_j-2} B_{ji} B_{jd} q'_{h(j,i)p} q'_{h(j,d)g} \dot{q}_p.$$

Определяем ускорения точек ППМ в абсолютной системе координат:

$$\ddot{R}_{ji} = [T_{ji(i+1)}] \left\{ \left[ B_{jp}^2 + \sum_{d=3}^{n_j-2} \sum_{c=3}^{n_j-2} B_{jd} B_{jc} q'_{h(j,d)p} \times \right. \right. \\ \times q'_{h(j,c)g} \dot{q}_g + \sum_{d=3}^{n_j-2} B_{jd} q''_{h(j,d)p} \dot{q}_p \left. \right] \times \dot{q}_p + \\ \left. + B_{jp} + \sum_{d=3}^{n_j-2} B_{jd} q'_{h(j,d)p} \ddot{q}_p \right\} \times r_{ji}.$$

В работе составлены также алгоритм и программа для расчета кинематики ППМ.

Результаты численного расчета кинематики ППМ приведены на рис. 2. По горизонтальной оси отложено время в секундах, по вертикальной оси – значения перемещений, линейных скоростей и ускорений точек сочленения звеньев ППМ в метрах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Baigunchekov Zh.Zh., Nurakhmetov B.K., Absadykov B.N., Baigunchekov N.Zh., Kondybaev E.S. Kinematics of the Parallel Manipulators with Functionally Independent Drives (Part I, Part II). Proceedings of the 11th World IFToMM Congress. 1-4 April, 2004. P. 1647-1952 (Tianjin, China).

2. Liu X., Tang X., Wang J. Singularity Analysis of a New Parallel Manipulator with Revolute Actuators. Proceedings of the XI World IFToMM Congress. 1-4 April, 2004. P. 1977-1981 (Tianjin, China).

3. Байгунчеков Ж.Ж., Нурахметов Б.К., Мырзагельдиева Ж.М. Матричные уравнения замкнутости контуров пространственного параллельного манипулятора ориентирующего типа // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2003. № 4. С. 88-95.

4. Айкер, Денавит, Хартенберг. Итерационный метод анализа перемещений пространственных механизмов // Конструирование и технология машиностроения. 1965. № 1. С. 169-176.

5. Уикер мл. Динамика пространственных механизмов. Ч. 1. Точные уравнения движения // Конструирование и технология машиностроения. 1969. № 1. С. 264-270.

6. Фу К., Гансалес Р., Ли К. Робототехника. М.: Мир, 1989. 624 с.

7. Масанов Ж.К., Сартаев К.З., Жолдасов С.А. Моделирование динамики упругих пространственных механизмов высоких классов // Тезисы докладов международной научной конференции "Проблемы теоретической и прикладной механики", посвященной 75-летию У. А. Джолдасбекова. С. 56-57.

#### Резюме

Накты кеністік параллель манипулятор карастырылған, оның бастапқы шарттары белгіленіп, буындардың берілген геометриялық параметрлері арқылы Денавит–Хартенбергтің матрицалық өдісімен манипулятордың кинематикасы саралады.

#### Summary

In this scientific work we analyses a particular space parallel manipulator, establish initial data and based on fixed geometrical parameters of link we conduct a kinematical analyses of manipulator by the Denavit–Hartenberg matrix way.

Казахстанско-Британский  
технический университет,  
г. Алматы

Поступила 3.06.06г.