А.К.ШАЙМЕРДЕНОВА

(PhD докторант КазНУ имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОТИПНОГО ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Аннотация

В работе изучаются однотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы. Найдены асимптотические свойства вероятности невырождения в случайный момент наблюдения в критическом и близкие к критическому случаях.

Ключевые слова: вероятность невырождения, случайный момент, дробно-линейное распределение, Тауберова теорема.

Кілт сөздер: үдерістің тоқтамау ықтималдығы, кездейсоқ бақыланған уақыт, бөлшек-сызықты үлестірім, Таубер теоремасы.

Keywords: probability of not degeneration, casual moment, fractional and linear distribution, Tauberian theorem.

Очень удобная интерпретация ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона это их описание в терминах эволюции популяции частиц. Процесс начинается с одной частицы. Через Z_0 обозначим начальную частицу. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число новых частиц ξ в соответствии с распределением $\Pi(\xi = k) = p_k, k = 0,1,\ldots$. Каждая новая частица также имеет единичную продолжительность жизни и в конце жизни порождает (независимо от других частиц) случайное число потомков в соответствии с распределением $p_k, k = 0,1,\ldots$. Таким образом, при $n \geq 0$

$$Z_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_{Z_n}^{(n)}$$

где $\xi_i^{(n)} -$ число потомков $i -$ой частицы $n -$го поколения ($i = 1,2,\ldots,Z_n$), причем $\xi_i^{(n)}$ одинаково распределены при всех $i = 1,2,\ldots$ и $n = 0,1,2,\ldots$ и независимы. В однотипном случае, последующие размерности популяции $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ имеют форму Марковской цепи с состояниями $\{0,1,2,\ldots\}$.

Закон размножения частиц в популяций дается через производящую функцию

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, |s|\leq 1.$$

Среднее число частиц вычисляется через производящую функцию $M = f'(1)$. Сравнивая среднее число частиц M с единицой, получим классификацию ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона:

• если $M>1$, процесс называется надкритическим,

• если $M<1$, процесс называется докритическим,

• если $M=1$, процесс называется критическим.

Хорошо известно, что для критических процессов Гальтона-Ватсона справедлива следующая предельная теорема (см. например, [1], 49 стр.)

Теорема 1.1 В критическом случае, когда $M=1$, если производящая функция удовлетворяет условию $f''(1)=2B\in(0,\infty)$, то имеет место следующая асимптотика вероятности невырождения процесса за n поколений

$$\Pi(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{Bn}, n\to\infty.$$

То есть имеется асимптотическое поведение вероятности невырождения за фиксированный момент наблюдений. А что если мы будем наблюдать процесс в случайное время T? Какова вероятность невырождения критического процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением наблюденного в случайное время? Какова вероятность невырождения процессов близких к критическим в случайный момент времени?

Рассмотрим для простоты однотипный ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением, так как для этого случая многие вычисления упрощаются.

Производящая функция для дробно-линейного распределения дается через

$$f(s)=h_0+h_1\frac{s}{1+m-ms},$$

с вероятностью h_0 частица не имеет потомков, $1-h_0=h_1-$ вероятность того, что частица будет иметь хотя бы один потомок, $m-$ положительная константа. В этом случае, среднее число потомков вычисляется как $M = h_1(1+m)$. Закон размножения за n поколений сохраняет свойство дробно-линейности (в [2], 6 стр.)

$$f^{(n)}(s) = h_0^{(n)} + h_1^{(n)} \frac{s}{1+m^{(n)} - m^{(n)}s}$$

где

- в надкритическом случае, когда $M > 1$, вероятность $h_1^{(n)} = \dfrac{M^n(1-q)}{M^n - q}$ и

$$1+m^{(n)} = \frac{M^n - q}{1-q},$$

- в докритическом случае, когда $M < 1$, вероятность $h_1^{(n)} = \dfrac{M^n(q-1)}{q-M^n}$ и $1+m^{(n)} = \dfrac{q-M^n}{q-1}$,

- в критическом случае, когда $M = 1$, вероятность $h_1^{(n)} = \dfrac{1}{1+mn}$ и $1+m^{(n)} = 1+mn$,

где $q = \dfrac{1+m}{m}h_0$ и $h_1^{(n)}$ является $P(Z_n \neq 0)$ вероятностью невырождения .

Следующая теорема аналог теоремы 1 для ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением

Теорема 2.2 В критическом случае, когда $M = 1$, верна следующая асимптотика вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона за n поколений

$$P(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{mn}, n \to \infty.$$

Учитывая эту теорему, хотим аналогичный результат получить для вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения.

Пусть $T \sim Geom(p)$ случайное время распределенная геометрически, т.е. $P(T = n) = p(1-p)^n$. Наша цель найти асимптотические свойства вероятности невырождения дробно-линейных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения T.

Во втором разделе даются асимптотические свойства вероятности невырождения критических дробно-линейных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения T. Из результата видно, что в случайный момент наблюдения вероятность невырождения отличается от случае в теореме 2 на $\ln n$ (учитывается, что p порядка $\frac{1}{n}$). В полученном нами результате вероятность невырождения становится больше за счет $\ln n$. Почему больше? Случайный момент T меньше момента n. Значит вероятность невырождения больше. Может быть, случайный момент T больше момента n, но с маленькой вероятностью $\Pi(T > n) = (1-p)^n$ (хвост геометрического распределения). Поэтому в среднем T меньше момента n, что и делает вероятность невырождения больше.

В третьем разделе рассматриваются процессы близкие к критическому случаю в случайный момент времени.

Основной результат для критического процесса

Для краткости, вероятность невырождения в случайный момент наблюдения обозначим через $1 - Q_p$, так как зависит от параметра p. Она находится по формуле полной вероятности

$$1 - Q_p = \Pi(Z_T \neq 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi(T = n)\Pi(Z_T \neq 0 \mid T = n),$$

Заметим, что условная вероятность $\Pi(Z_T \neq 0 \mid T = n)$ совпадает с вероятностью невырождения $\Pi(Z_n \neq 0)$.

Дадим определение медленно меняющейся функций и приводим утверждение Тауберовой теоремы из [3] (513 стр.). Это утверждение нам понадобится при доказательстве теоремы.

Определение.3 Заданная на $(0, \infty)$ положительная функция L называется медленно меняющейся на бесконечности в том и только в том случае, когда она удовлетворяет условию

$$\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1$$

при $t \to \infty,$ для любого $x > 0$.

Теорема 3. 4 Пусть $a_n \geq 0$, и пусть $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ сходится при $0 \leq s < 1$. Если L медленно меняется на бесконечности и $0 \leq \rho < \infty$, то каждое из двух соотношений

$$F(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right), s \to 1- \quad (1)$$

и

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n), n \to \infty \quad (2)$$

влечет другое.

Далее, если последовательность a_n монотонна и $0 < \rho < \infty$, то (1) равносильно соотношению

$$a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n), n \to \infty.$$

Теорема 4.5 Вероятность невырождения критического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдений удовлетворяет соотношению

$$1 - Q_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, p \to 0.$$

Доказательство Теоремы 4:

Эту теорему будем доказывать с помощью Тауберовой теоремы. Вероятность невырождения за n поколения в критическом случае

$$\Pi(Z_n \neq 0) = \frac{1}{1+mn}.$$

Учитывая это, получим формулу вероятности невырождения в случайный момент времени для критического случая

$$1 - Q_p = \Pi(Z_T \neq 0) = p\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{1+mn}.$$

Далее, применяя Тауберову теорему получим асимптотику для вероятности невырождения $1 - Q_p$. В нашем случае, $a_n = \dfrac{1}{1+mn}, s = 1-p$. Имеем,

$$1 + \frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+2m} + \ldots + \frac{1}{1+mn} \sim \frac{1}{m} \ln n, n \to \infty.$$

Сравнивая с (2), замечаем, что $\rho = 0, L(n) = \dfrac{1}{m}\ln n$. По утверждению теоремы 3, (2) влечет (1). Тогда имеет место

$$p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-p)^n}{1+mn} \sim \frac{1}{m}p\ln p^{-1}, p \to 0+.$$

Это завершает доказательство данной теоремы.

Близкие к критическому случаю процессы

Интересен случай, когда $M = M(p)$ в зависимости от p стремится к единице, т.е. $M(p) \to 1$, при $p \to 0$.

Учитывая выражение для q, перепишем вероятность $\Pi(Z_n \neq 0)$ в следующем виде в надкритическом и докритическом случаях

$$\Pi(Z_n \neq 0) = \frac{M^n}{1 + m(1 + M + \ldots + M^{n-1})}.$$

Отсюда

$$1 - Q_p = p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M(1-p))^n}{1 + m(1 + M + \ldots + M^{n-1})}. \qquad (3)$$

Теорема 5.6 Пусть $M < 1$. Если $\dfrac{1 - M(p)}{p} \to c$ (при $p \to 0$), тогда для вероятности невырождения процесса в случайный момент наблюдения верно

$$1 - Q_p \sim \frac{1}{m}p\ln p^{-1}, p \to 0.$$

Теорема 67. Пусть $M > 1$. Если $\dfrac{M(p) - 1}{p} \to c$ (при $p \to 0$), тогда для вероятности невырождения процесса в случайный момент наблюдения верно

$$1 - Q_p \sim \frac{1}{m}p\ln p^{-1}, p \to 0.$$

Доказательство Теоремы 5:

Рассмотрим отдельно вероятность $1 - Q_p$ в докритическом случае, при $M < 1$. Интересуемся асимптотическим поведением вероятности невырождения (3) в случайный момент времени T, когда $\frac{1-M(p)}{p} \to c$ (при $p \to 0$), т.е. при достаточно малых p для M имеется следующее неравенство: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_\varepsilon : \forall p < p_\varepsilon$ выполняется

$$1-(c+\varepsilon)p \le M \le 1-(c-\varepsilon)p.$$

Из оценки для M, получим $1-(1+c+\varepsilon)p \le M(1-p) \le 1-(1+c-\varepsilon)p$. С помощью последнего неравенства и $M<1$, оценим сумму от 0 до ∞ снизу

$$\begin{aligned}
&p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})} \ge p\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor}\frac{(1-(1+c+\varepsilon)p)^n}{1+mn} \\
&\ge (1-(1+c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}\, p\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor}\frac{1}{1+mn} \ge (1-(1+c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}\, p\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{p+mx} \\
&\ge \frac{1}{m}(1-(1+c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}\, p(\ln p^{-1}+\ln m\varepsilon).
\end{aligned}$$

Отсюда,

$$\liminf_{p\to 0}\frac{1-\mathsf{Q}_p}{p\ln p^{-1}} \ge \frac{e^{-(1+c+\varepsilon)\varepsilon}}{m}. \qquad (4)$$

Разделим (3) на две суммы

$$1-\mathsf{Q}_p = p\left[\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor}\frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})} + \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor+1}^{\infty}\frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})}\right].$$

Оценивая сверху обе суммы, видим, что основной вклад дает первая сумма

$$\begin{aligned}
&p\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor}\frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})} \le p\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor}\frac{(1-(1+c-\varepsilon)p)^n}{1+mnM^{\varepsilon/p}} \\
&\le p\sum_{x_n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor p}\frac{p}{p+mx_n e^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)}} \le p\left[1+\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{p+mxe^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)}}\right] \\
&\le p\left[\frac{1}{m}\ln p^{-1}+1+\frac{1}{m}(p+m\varepsilon\, e^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)})\right].
\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim_{p\to 0}e^{\varepsilon/p\ln(1-(c+\varepsilon)p)} = e^{-\varepsilon(c+\varepsilon)}$. Таким образом, чтобы доказать

$$\limsup_{p\to 0}\frac{1-Q_p}{p\ln p^{-1}}\le\frac{1}{m} \qquad (5)$$

достаточно показать, что предел второй суммы, при $p\to 0$, будет 0.

Действительно,

$$\sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}\frac{(M(1-p))^n}{1+m\frac{1-M^n}{1-M}}\le\sum_{n=\lfloor\varepsilon/p\rfloor+1}^{\infty}\frac{(M(1-p))^n}{1+m\frac{1-M^{\varepsilon/p}}{1-M}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{m}{1-M}(1-M^{\varepsilon/p})}\frac{(M(1-p))^{\varepsilon/p}}{1-M(1-p)}\le p\frac{1-M}{m\,(1-(c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}}\frac{(1-(1+c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}}{(1+c-\varepsilon)p}$$
$$\to\frac{c}{me^{-(c-\varepsilon)\varepsilon}}\frac{e^{-(1+c-\varepsilon)\varepsilon}}{1+c-\varepsilon},p\to 0,$$

умножая на p, получим, что $p\frac{c}{me^{-(c-\varepsilon)\varepsilon}}\frac{e^{-(1+c-\varepsilon)\varepsilon}}{1+c-\varepsilon}$ стремится к 0, при $p\to 0$ и фиксированном ε. Полученные (4) и (5) доказывают данную теорему, при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство Теоремы 6:

Теперь рассмотрим надкритический случай. Также заинтересованы асимптотическим поведением вероятности невырождения (3) в случайный момент времени T, когда $\frac{M(p)-1}{p}\to c$ (при $p\to 0$), т.е. при достаточно малых p для M имеем следующее: $\forall\varepsilon>0,\exists p_\varepsilon,\forall p<p_\varepsilon$ выполняется неравенство $1+(c-\varepsilon)p\le M\le 1+(c+\varepsilon)p$.

С помощью $M>1$ и неравенства

$$1-(1-c+2\varepsilon)p\le M(1-p)\le 1-(1-c-2\varepsilon)p,$$

сначала оценим сумму от 0 до ∞ снизу

$$1-Q_p=p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})}\ge p\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{(1-p)^n}{1+mn(1+(c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}}$$
$$\ge p(1-p)^{\varepsilon/p}\sum_{n=0}^{\lfloor\varepsilon/p\rfloor}\frac{1}{1+m_\varepsilon n},$$

где $\quad m_\varepsilon = m(1+(c+\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}$

$$= p(1-p)^{\varepsilon/p} \sum_{x_n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor p} \frac{p}{p+m_\varepsilon x_n} \geq \frac{p(1-p)^{\varepsilon/p}}{m_\varepsilon} \int_p^{p+\varepsilon m_\varepsilon} \frac{dy}{y}$$
$$\geq \frac{p(1-p)^{\varepsilon/p}}{m_\varepsilon} \left(\ln p^{-1} + \ln \varepsilon\, m_\varepsilon\right).$$

Следовательно,

$$\liminf_{p\to 0} \frac{1-\mathsf{Q}_p}{p \ln p^{-1}} \geq \frac{e^{-\varepsilon}}{m e^{\varepsilon(c+\varepsilon)}}.$$

(при $\varepsilon \to 0$, получим нужное нам неравенство). Оценим сумму сверху, для этого (3) выражаем в следующем виде

$$1-\mathsf{Q}_p = p\left[\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})} + \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor+1}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})}\right].$$

Заметим, что основную роль играет первая сумма

$$p\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\ldots+M^{n-1})} \leq p\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(1-(1-c-2\varepsilon)p)^n}{1+mn}$$
$$\leq p\sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{1}{1+mn} \leq p\left[\frac{1}{m}\ln p^{-1} + 1 + \frac{p+m\varepsilon}{m}\right].$$

Отсюда

$$\limsup_{p\to 0} \frac{1-\mathsf{Q}_p}{p \ln p^{-1}} \leq \frac{1}{m},$$

так как

$$\sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor+1}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1+m\dfrac{M^n-1}{M-1}} \leq \frac{1}{1+\dfrac{m}{M-1}(M^{\varepsilon/p}-1)} \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor+1}^{\infty} (1-(1-c-2\varepsilon)p)^n$$
$$= \frac{M-1}{m(M^{\varepsilon/p}-1)} \frac{(1-(1-c-2\varepsilon))^{\varepsilon/p}}{(1-c-2\varepsilon)p} \leq \frac{M-1}{m(1+(c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}} \frac{(1-(1-c-2\varepsilon))^{\varepsilon/p}}{(1-c-2\varepsilon)p}$$
$$\to \frac{ce^{-\varepsilon(1-c-2\varepsilon)}}{me^{(c-\varepsilon)\varepsilon}(1-c-2\varepsilon)},\ p\to 0.$$

Учитывая множитель p, получим $p\dfrac{ce^{-\varepsilon(1-c-2\varepsilon)}}{me^{(c-\varepsilon)\varepsilon}(1-c-2\varepsilon)} \to 0, p \to 0$ (при фиксированном ε). Это завершает доказательство теоремы.

Литературы

1 Ватутин В.А. Ветвящиеся процессы. М.: МИАН, 2008.

2 Athreya K., Ney P. Branching processes. London-New York-Sydney: John Wiley & Sons, 1972.

3 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, том 2, 1967.

References

1 Vatutin V.A. Vetvjashiesya prosessy. M.: MIAN, 2008 (in Russ.).

2 Athreya K., Ney P. Branching processes. London-New York-Sydney: John Wiley & Sons, 1972.

2 Feller W. Vvedenie v teoriju verojatnostei i ee prilozhenija. M.: Mir, tom 2, 1967 (in Russ.).

Резюме

А.Қ.Шаймерденова

(әль-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың PhD докторанты, Алматы қ, Қазақстан)

КЕЗДЕЙСОҚ БАҚЫЛАНҒАН УАҚЫТТАҒЫ БІР ТИПТІ

БӨЛШЕК-СЫЗЫҚТЫ БҰТАҚТАЛАТЫН ҮДЕРІСТЕРГЕ АРНАЛҒАН ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАР

Жұмыста біртипті бөлшек-сызықты бұтақталатын үдерістер қарастырылған. Кездейсоқ бақыланған уақыттағы үдерістің тоқтамау ықтималдығының асимптотикалық қасиеттері критикалық және критикалыққа жақын жағдайларда табылған.

Кілт сөздер: үдерістің тоқтамау ықтималдығы, кездейсоқ бақыланған уақыт, бөлшек-сызықты үлестірім, Таубер теоремасы.

Summary

A.K.Shaimerdenova

(PhD doctoral candidate TREASURY of a name of al-Farabi, Almaty, Kazakhstan)

LIMIT THEOREMS FOR SINGLE-TYPE LINEAR-FRACTIONAL

BRANCHING PROCESSES AT RANDOM TIME

In the paper considered single-type linear-fractional branching processes. Asymptotic properties of survival probability at random time have been found in critical and close to critical cases.

Keywords: survival probability, random time, linear-fractional distribution, Tauberian theorem.

Поступила 17.06.2013 г.