

**КРИТЕРИЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ
НЕОБРАТИМОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ**

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент,
Республика Казахстан)

Аннотация. В данной работе получен критерий самосопряженности необратимого оператора Штурма-Лиувилля, отличающиеся от известных признаков Э. Л. Айнса и Н. Левинсона.

Ключевые слова: критерий, самосопряженность, необратимый оператор, Штурм-Лиувилль.

Тірек сөздер: критерий, жалқылық, қайтымсыз оператор, Штурм-Лиувилл.

Keywords: criterion, itselfconjugacy, irreversible operator, Sturm- Liuvill.

Пусть L – оператор второго порядка определяемый равенством

$$Ly = -y^{(2)}(x); \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2), \quad (2)$$

где $a_{ij} (i = 1,2; j = 1,2,3,4)$ – комплексные постоянные.

Обозначим соотношения $U_i[y] = 0, i = 1,2$. через $Uy = 0$. Задача

$$p; Ly = \lambda y, \quad Uy = 0 \quad (3)$$

называется задачей на собственные значения (или краевой задачей). Она называется самосопряженной, если

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad (4)$$

для всех $u, v \in C^2$ на $[0,1]$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$Uu = Uv = 0.$$

Если здесь $f, g \in L^2(0,1)$. то

$$(f, g) = \int_0^1 f \bar{g} dt, \quad \|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

Число (f, g) называется скалярным произведением функций f и g , и $\|f\|$ есть норма функции f в $L^2(0,1)$ [1, с. 205].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти необходимые и достаточные условия самосопряженности задачи (3).

Наш метод отличается от ранее известных методов и базируется на идеях работы [3].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ [2, с. 42] не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа [3, с. 31].

ЛЕММА 2. Если

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

то имеет место формула

$$\Delta_{13} \times \Delta_{24} + \Delta_{14} \times \Delta_{32} - \Delta_{14} \times \Delta_{34} = 0,$$

которая является следствием леммы 1.

ЛЕММА 3. Если $\Delta_{24} \neq 0$, то граничные условия (2) эквивалентны к граничным условиям,

$$\begin{cases} \Delta_{24} y'(0) + \Delta_{14} y(0) + \Delta_{34} y(1) = 0, \\ \Delta_{24} y'(1) + \Delta_{21} y(0) + \Delta_{23} y(1) = 0. \end{cases}$$

сопряженными которым являются

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{24} z'(0) + \bar{\Delta}_{14} z(0) + \bar{\Delta}_{12} z(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24} z'(1) - \bar{\Delta}_{34} z(0) - \bar{\Delta}_{32} z(1) = 0. \end{cases}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если $\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{32} + \Delta_{34} = 0$, то задача Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(n)}(x) = \lambda y(x); x \in (0,1)$$

$$U_i[y] = a_{i1} y(0) + a_{i2} y'(0) + a_{i3} y(1) + a_{i4} y'(1) = (i = 1, 2)$$

самосопряжена тогда и только тогда, когда

$$1) |\Delta_{124}| + |\Delta_{114} + \Delta_{132}| + |\Delta_{113}| \neq 0; 2) \Delta_{112} = e^{i\alpha} \Delta_{134};$$

$$3) \bar{\Delta}_{13} = e^{i\alpha} \Delta_{13}; \quad 4) \bar{\Delta}_{14} = e^{i\alpha} \Delta_{14}; \quad (6)$$

$$5) \bar{\Delta}_{24} = e^{i\alpha} \Delta_{24}; \quad 6) \bar{\Delta}_{32} = e^{i\alpha} \Delta_{32};$$

$$7) \bar{\Delta}_{34} = e^{i\alpha} \Delta_{12}.$$

$$\text{где } 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad \Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место равенство

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad (4)$$

для всех u, v удовлетворяющих условий $Uu = Uv = 0$. Тогда задача Штурма-Лиувилля не имеет не вещественных собственных значений.

Предположим, что $|\Delta_{24}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| = 0$, тогда 1) $\Delta_{24} = 0$; 2) $\Delta_{14} + \Delta_{32} = 0$; 3) $\Delta_{13} = 0$, поэтому по условию теоремы $\Delta_{12} + \Delta_{34} = 0$.

Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля являются квадратами корней уравнения [4, с. 33]

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} - \Delta_{12} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad (7)$$

следовательно, вся комплексная плоскость является собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля, что противоречит предыдущему утверждению, стало быть, имеет место неравенство

$$1) |\Delta_{24}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| \neq 0.$$

Если $\Delta^*(\lambda)$ – характеристическая функция [4, с. 33] сопряженной задачи Штурма-Лиувилля, то в силу леммы 1 существует такая постоянная $k_1^* \neq 0$, что

$$\Delta^*(\lambda) = k_1^* \times \overline{\Delta(\bar{\lambda})}.$$

С другой стороны, в силу самосопряженности задачи Штурма-Лиувилля, опять, в силу той же леммы, имеем

$$\Delta^*(\lambda) = k_2^* \times \Delta(\lambda).$$

Поэтому имеет место формула

$$\overline{\Delta(\bar{\lambda})} = \frac{k_2^*}{k_1^*} \times \Delta(\lambda) = k \times \Delta(\lambda), \rightarrow \overline{[\Delta(\bar{\lambda})]^2} = k \times \Delta(\lambda^2).$$

Тогда в силу формулы (7) имеем

$$\bar{\Delta}_{12} + \bar{\Delta}_{34} + \bar{\Delta}_{13} \frac{\sin \lambda}{\lambda} + (\bar{\Delta}_{14} + \bar{\Delta}_{32}) \cos \lambda - \bar{\Delta}_{12} \lambda \sin \lambda =$$

$$k \left[\Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \lambda}{\lambda} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \lambda - \Delta_{42} \lambda \sin \lambda \right].$$

Приравняв соответствующие коэффициенты в левой и правой части этой формулы, имеем

$$1) (\Delta_{12} + \Delta_{34}) = k(\Delta_{12} + \Delta_{34}); \quad 2) \bar{\Delta}_{13} = k\Delta_{13};$$

$$3) \overline{\Delta_{14} + \Delta_{32}} = k(\Delta_{14} + \Delta_{32}), \quad 4) \bar{\Delta}_{42} = k\Delta_{42}.$$

Кроме того, в силу предыдущего вывода

$$|\bar{\Delta}_{24}| + |\overline{\Delta_{14} + \Delta_{32}}| + |\bar{\Delta}_{13}| = |k| [|\Delta_{12}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}|], \rightarrow |k| = 1, k \neq 0.$$

Далее предположим, что $\Delta_{12} \neq 0$, тогда в силу леммы 3 граничные условия(2)принимают вид

$$\begin{cases} \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0, \\ \Delta_{24}y'(1) - \Delta_{12}y(0) - \Delta_{32}y(1) = 0 \end{cases}$$

а сопряженными к ним являются

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{24}z'(0) + \bar{\Delta}_{14}z(0) + \bar{\Delta}_{12}z(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}z'(1) - \bar{\Delta}_{34}z(0) - \bar{\Delta}_{32}z(1) = 0. \end{cases}$$

Если $L = L^*$, то из условия $y(x) \in D(L)$ следует, что $y(x) \in D(L^*)$, поэтому равенства

$$\begin{cases} \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0, \\ \Delta_{24}y'(1) - \Delta_{12}y(0) - \Delta_{32}y(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}y'(0) + \bar{\Delta}_{14}y(0) + \bar{\Delta}_{12}y(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}y'(1) - \bar{\Delta}_{34}y(0) - \bar{\Delta}_{32}y(1) = 0. \end{cases}$$

выполняются одновременно. Тогда в силу формулы $\bar{\Delta}_{24} = k\Delta_{24}$, имеем

$$\begin{cases} (\bar{\Delta}_{14} - k\Delta_{14})y(0) + (\bar{\Delta}_{12} - k\Delta_{34})y(1) = 0, \\ (-\bar{\Delta}_{34} + k\Delta_{12})y(0) + (-\bar{\Delta}_{32} + k\Delta_{32})y(1) = 0 \end{cases}$$

Отсюда в силу произвольности $y(0)$ и $y(1)$ имеем

$$\bar{\Delta}_{14} = k\Delta_{14}, \quad \bar{\Delta}_{12} = k\Delta_{34}, \quad \bar{\Delta}_{34} = k \times \Delta_{12}, \quad \bar{\Delta}_{32} = k\Delta_{32}.$$

Следовательно выполняются все условий теоремы.

Теперь докажем достаточность условий теоремы. Пусть имеет место формулы (6). В силу первой формулы из (6) имеем

$$|\Delta_{24}| + |\Delta_{14} + \Delta_{32}| + |\Delta_{13}| \neq 0.$$

Для определенности предположим, что $\Delta_{24} \neq 0$, тогда граничные условия(2) эквивалентны с граничным условиям

$$\begin{cases} \Delta_{24}y'(0) + \Delta_{14}y(0) + \Delta_{34}y(1) = 0, \\ \Delta_{24}y'(1) + \Delta_{21}y(0) + \Delta_{23}y(1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Сопряженные граничные условия к этим имеет вид

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{24}z'(0) + \bar{\Delta}_{14}z(0) + \bar{\Delta}_{12}z(1) = 0, \\ \bar{\Delta}_{24}z'(1) - \bar{\Delta}_{34}z(0) - \bar{\Delta}_{32}z(1) = 0. \end{cases}$$

Тогда в силу условий теоремы имеем

$$\begin{cases} k\Delta_{24}z'(0) + k\Delta_{14}z(0) + k\Delta_{34}z(1) = 0, \\ k\Delta_{24}z'(1) - k\Delta_{12}z(0) - k\Delta_{32}z(1) = 0 \end{cases} \quad k = e^{i\alpha} \neq 0$$

Разделив обе части этих равенств на k , получим

$$\begin{cases} \Delta_{24}z'(0) + \Delta_{14}z(0) + \Delta_{34}z(1) = 0, \\ \Delta_{24}z'(1) - \Delta_{12}z(0) - \Delta_{32}z(1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Идентичность граничных условий (8) и (9), очевидна, остальные случаи доказываются также. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: ИЛ, 1958. – С. 474.
- 2 Леонтьев А.Ф. Целые функций. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – С. 176.
- 3 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.
- 4 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – С. 329.
- 5 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939. – 717 с.

REFERENCES

- 1 Koddington Je.A., Levinson N. Teorija obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. M: IL, 1958. S. 474.
- 2 Leont'ev A.F. Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. S. 176.

3 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN RK. Serija fiz.-mat. 2000. № 3. S. 29-34.

4 Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija. Kiev: Naukva dumka, 1977. S. 329.

5 Ajns Je.L. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Har'kov, 1939. – 717 s.

Резюме

Шалданбаев А. Ш., И. О. Оразов

ҚАЙТЫМСЫЗ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ЖАЛҚЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент,
Қазақстан Республикасы)

Бұл еңбекте қайтымсыз Штурм-Лиувилл операторының жалқылығының үзілді-кесілді шарттары табылған, олар көпке белгілі Э. Л. Айнс пен Н. Левинсонның шарттарынан мүлдем өзгеше.

Тірек сөздер: критерий, жалқылық, қайтымсыз оператор, Штурм-Лиувилл.

Summary

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

CRITERION ITSELF CONJUGACY IRREVERSIBLE STURM-LIOUVILLE OPERATOR

In this work the criterion of self-conjugacy of the irreversible operator of the Sturm Liouville, E. L. Aynsas and N. Levinson different from known signs is received.

Keywords: criterion, itselfconjugacy, irreversible operator, Sturm-Liuvill.

Поступила 15.10.2013г.