А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О.ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В настоящей работе получены граничные условия вольтеррова оператора Штурма-Лиу-вилля.

Ключевые слова: граничные условия, вольтерровы операторы, Штурм-Лиувилль.

Тірек сөздер: шектік шарттар, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Keywords: boundary conditions, voltaire's operators, Shturm-Liuvill.

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувиля

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми граничными условиями .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувиля (1)–(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной плоскости.

В работе [2] было установлено, что если оператор Штурма-Лиувилля вольтерров, то его граничные условия приводимы к виду

$$y(0) = ky(1),\ y'(0) = -ky'(1) \tag{3}$$

где k – некоторое комплексное число, т.е. $k \in C$. В связи с этим возникает следующая задача, а нельзя ли выразить постаянную k через миноры граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

т.е. через величины

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i,j = 1,2,3,4) \tag{5}$$

Постановка этой задачи навеяна формулой (6), которая не была известна нам ранее.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

ЛЕММА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{2}$$

обратим, то граничные условия (2) приводимы к виду

$$\begin{cases} \Delta_{13}y(0) - (\Delta_{12} + \Delta_{32})y'(0) - \Delta_{13}y(1) - (\Delta_{14} + \Delta_{34})y'(1) = 0, \\ (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14})\, y(0) - (\Delta_{32} + \Delta_{42})y'(0) + (\Delta_{32} + \Delta_{34})y(1) - (\Delta_{24} + \Delta_{34})y'(1) = 0 \end{cases} \tag{2'}$$

ЛЕММА 2. Если функция экспоненциального типа $f(z)$ [1, с. 42] не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа [2, с. 31].

ЛЕММА 3.Если

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i,j = 1,2,3,4) \tag{5}$$

где a_{ij} ($i = 1,2$; $j = 1,2,3,4$) комплексные числа, то имеет место формула

$$\Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{32} - \Delta_{14}\Delta_{34} = 0, \tag{6}$$

которая является следствием леммы 1

ЛЕММА 4. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \Delta_{13} = 0, \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0. \tag{7}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями является вольтерровым, то гра-ничные условия (2) приводимы к виду

$$y(0) = \frac{\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} y(1), \qquad y'(0) = -\frac{\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} y'(1) \tag{8}$$

где

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} (i,j = 1,2,3,4), \tag{5}$$

миноры граничной матрицы (4). При $\Delta_{14} = 0$ получим задачу Коши на левом конце отрезка [0,1], а при $\Delta_{12}^2 = \Delta_{14}^2$ получим задачу Коши на правом конце отрезка [0,1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{42}=0, \qquad \Delta_{13}=0, \qquad \Delta_{14}+\Delta_{32}=0, \qquad +\Delta_{34}\neq 0. \tag{7}$$

С учетом этих условий, граничное условие (2)′ принимает следующий вид

$$\begin{cases} (\Delta_{12}+\Delta_{32})y'(0)+(\Delta_{14}+\Delta_{34})y'(1)=0, \\ (\Delta_{12}+\Delta_{14})y(0)-\Delta_{32}y'(0)+(\Delta_{32}+\Delta_{34})\,y(1)-\Delta_{34}y'(1)=0 \end{cases}. \tag{9}$$

Вычислим детерминант

$$\begin{vmatrix} \Delta_{12}+\Delta_{32} & \Delta_{14}+\Delta_{34} \\ \Delta_{32} & \Delta_{34} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{34}(\Delta_{12}+\Delta_{32})-\Delta_{32}(\Delta_{14}+\Delta_{34})=\Delta_{12}\times\Delta_{34}+\Delta_{32}\Delta_{34}-\Delta_{32}\Delta_{14}-\Delta_{32}\Delta_{34}=$$

$$=\Delta_{12}\Delta_{34}-\Delta_{14}\Delta_{32}=0.$$

в силу алгебраического тождества(6).

Если $|\Delta_{32}|+|\Delta_{34}|\neq 0$, то существует комплексное число k такое, что

$$\Delta_{12}+\Delta_{32}=k\Delta_{32}, \qquad \Delta_{14}+\Delta_{34}=k\,\Delta_{34}.$$

В силу линейной независимости краевых условий $k\neq 0$. Умножив вторую строку формулы (9) на k и прибавив полученное выражение к первой строке этой же формулы, получим

$$k(\Delta_{12}+\Delta_{14})y(0)+k(\Delta_{32}+\Delta_{34})\times y(1)=0.$$

Поскольку $k\neq 0$, то можно разделить эту формулу на k, после чего мы имеем

$$(\Delta_{12}+\Delta_{14})y(0)+(\Delta_{32}+\Delta_{34})y(1)=0.$$

Таким образом, граничные условия (9) примут вид

$$\begin{cases} (\Delta_{12}+\Delta_{32})y'(0)+(\Delta_{14}+\Delta_{34})y'(1)=0, \\ (\Delta_{12}+\Delta_{14})y(0)+(\Delta_{32}+\Delta_{34})y(1)=0. \end{cases}$$

или с учетом условия $\Delta_{32}=-\Delta_{14}$,

$$\begin{cases} (\Delta_{12}-\Delta_{32})y'(0)+(\Delta_{14}+\Delta_{34})y'(1)=0, \\ (\Delta_{12}+\Delta_{14})y(0)+(\Delta_{32}-\Delta_{34})y(1)=0. \end{cases} \tag{9)'$$

Если $\Delta_{12}=\Delta_{14}$, то из тождества (6) имеем

$$\Delta_{14}\times\Delta_{32}-\Delta_{12}\Delta_{34}=0,\to\Delta_{14}(\Delta_{32}-\Delta_{34})=0,\to\Delta_{14}(-\Delta_{14}-\Delta_{34})=0,\to\Delta_{14}(\Delta_{14}+\Delta_{34})=0, \Delta_{14}(\Delta_{12}+\Delta_{34})=0,$$

поскольку $\Delta_{12}+\Delta_{34}\neq 0$, то отсюда делаем вывод, что $\Delta_{14}=0,\to\Delta_{12}=0,\to\Delta_{34}\neq 0$. Тогда из (9)′ имеем

$$\Delta_{34}y'(1)=0, \Delta_{34}\times y(1)=0 \quad \text{или } y'(1)=0, y(1)=0.$$

Это есть задача Коши на правом конце интервала [0,1].

Если $\Delta_{12} + \Delta_{14} = 0$, то из тождества (6) имеем

$\Delta_{14}\Delta_{32} - \Delta_{12} \times \Delta_{34} = 0, \rightarrow \Delta_{14}(\Delta_{32} + \Delta_{14}) = 0, \Delta_{32} = -\Delta_{14} = \Delta_{12}, \rightarrow \Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34}) = 0, \rightarrow \Delta_{14} = 0, \Delta_{12} = 0, \rightarrow \Delta_{34} \neq 0$
.

Следовательно опять получим задачу Коши

$$y'(1) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Пусть теперь $\Delta_{12} \neq \pm\Delta_{14}$, тогда

$$y'(0) = -\frac{\Delta_{34} + \Delta_{14}}{\Delta_{12} - \Delta_{14}} y'(1), \qquad y(0) = -\frac{-\Delta_{34} - \Delta_{14}}{(\Delta_{12} + \Delta_{14})} y(1) \qquad (10)$$

Принимая во внимание алгебраическое тождество(6), преобразуем коэффиценты граничного условия (10).

$$\frac{\Delta_{34} + \Delta_{14}}{\Delta_{12} - \Delta_{14}} = \frac{(\Delta_{34} + \Delta_{14})(\Delta_{12} + \Delta_{14})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14} \times \Delta_{34} + \Delta_{14} \times \Delta_{12} + \Delta_{14}^2}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2}$$
$$= \frac{\Delta_{14}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{12}}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2};$$

Аналогично имеем

$$\frac{\Delta_{34} - \Delta_{14}}{\Delta_{12} + \Delta_{14}} = \frac{(\Delta_{34} - \Delta_{14})(\Delta_{12} - \Delta_{14})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{\Delta_{34}\Delta_{12} - \Delta_{34} \times \Delta_{14} - \Delta_{14}\Delta_{12} + \Delta_{14}^2}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2} = \frac{-\Delta_{14}(\Delta_{12} + \Delta_{34})}{\Delta_{12}^2 - \Delta_{14}^2}.$$

Если $|\Delta_{32}| + |\Delta_{34}| = 0$, то $\Delta_{32} = \Delta_{34} = 0$, тогда граничные условия (9) примут вид

$$\Delta_{12} \times y'(0), \Delta_{12} \times y(0) = 0, \rightarrow y'(0) = 0, y(0) = 0 .$$

Это есть задача Коши на левом конце отрезка [0,1].

ЛИТЕРАТУРА

1 Леонтьев А.Ф Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

2 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН ОК. Серия физ. мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

REFERENCES

1 Leont'ev A.F Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. 176 s.

2 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN OK. Serija fiz. mat. 2000. № 3. S. 29-34.

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О.Оразов

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ВОЛЬТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ ТУРАЛЫ

Бұл еңбекте вольтерлі Штурма-Лиувилл операторының шекаралық шарттары қорытылған.

Тірек сөздер: шектік шарттар, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Summary

A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

BOUNDARY CONDITIONS VOLTERRA STURM-LIOUVILLE

In the real work boundary conditions вольтеррова the operator of Storm Liouville are received.

Keywords: boundary conditions, voltaire’s operators, Shturm-Liuvill.

Поступила 15.10.2013г.