А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

О ПОДОБИИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В настоящей работе доказано, что все вольтерровые краевые задачи Штурма-Лиувилля подобны задаче Коши.

Ключевые слова: подобие, вольтерровы операторы, Штурм-Лиувилль.

Тірек сөздер: ұқсастық, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Keywords: resemble, voltaire’s operators, Shturm-Liuvill.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); \quad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \;\; (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми граничными условиями (2), это означает, что хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} \; (i, j = 1,2,3,4) \tag{3}$$

граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной плоскости.

В работе [1] было установлено, что если оператор Штурма-Лиувилля вольтерров, то его граничные условия эквивлентны граничным условиям

$$y(0) = ky(1), \qquad y'(0) = -ky'(1) \; (5)$$

где k – некоторое комплексное число, т.е. $k \in C$.

Одной из классических вольтерровых задач является задача Коши

$$Lz = -z^{2}(x) = \mu z(x); \quad x \in (0,1)(6)$$

$$y(0) = 0, y^{'}(0) = 0 \tag{7}$$

В связи с этим возникает следующая задача.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Показать, что все вольтерровые краевые задачи Штурма-Лиувилля подобны задаче Коши.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Собственные значение задачи Штурма-Лиувилля(1)-(2) являются квадратами корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \times \Delta_{24} = 0 \tag{8}$$

где Δ_{ij} находятся по формуле (3) [2, с. 35]. Эта функция принадлежит к классу целых функций экспоненциального типа [3, с. 42], для которых справедлива следуюшая лемма 1 [1, с. 31].

ЛЕММА 1. Если функция экспоненциального типа не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные числа.

ЛЕММА 2. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{24} = 0, \qquad \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \qquad \Delta_{13} = 0, \qquad \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0, \tag{9}$$

где $\Delta_{ij} = (i, j = 1,2,3,4)$ находятся по формуле (3).

Достаточность условий (9) следует из формулы (8), а необходимость является следствием леммы 1.

ЛЕММА 4. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, то существует комплексное число k, такое, что граничные условия (2) эквивалентны к граничным условиям

$$y(0) = ky(1), \qquad y^{'}(0) = -ky^{'}(1), k \in C \tag{10}$$

В работе [1] приведено подробное доказательство этой леммы.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) вольтерров, то он подобен оператору Коши

$$Cz = -z''(x);\ \ x \in (0,1)$$
$$z(0) = 0, \qquad z'(0) = 0.$$

и оператор подобия имеет вид $z(x) = Ty(x) = y(x) - ky(1-x), k^2 \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСВО. В силу леммы 4, граничные условия (2) принимают вид (10), т.е.

$$y(0) = ky(1), \qquad y'(0) = -ky'(1), \qquad k \in C.$$

Полагая $z(x) = y(x) - ky(1-x)$, имеем $z'(x) = y'(x) + ky'(1-x)$, следовательно $z(0) = y(0) - ky(1) = 0,\qquad z'(0) = y'(0) + ky'(1) = 0;$

Поэтому оператора подобия ищем в виде

$$z(x) = Ty(x) = y(x) - ky(1-x).$$

Найдем обратный оператор T^{-1}. Заменив x на $1 - x$ из последней формулы, имеем

$$z(1-x) = y(1-x) - ky(x).$$

Теперь составим систему уравнений

$$\begin{cases} y(x) - ky(1-x) = z(x), \\ -ky(x) + y(1-x) = z(1-x) \end{cases}$$

относительно неизвестной $y\ (x)$.

Решив эту систему уравнений методом Крамера, находим $y(x)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z(x) & -k \\ z(1-x) & 1 \end{vmatrix} = z(x) + kz(1-x),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & z(x) \\ -k & z(1-x) \end{vmatrix} = z(1-x) + kz(x),$$

$$y(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{z(x) + kz(1-x)}{1-k^2}, y(1-x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{z(1-x) + kz(x)}{1-k^2};$$

Следовательно, $T^{-1} = \dfrac{I + kS}{1-k^2}$, где $Su(x) = u(1-x)$.

Далее

$$Ly = -y''(x);\ \ x \in (0,1),$$

$$TLy(x) = -(I - kS)\, y''(x) = -y''(x) + ky''(1-x);$$

$$C\ T\ y(x) = -\frac{d^2}{dx^2}[y(x) - ky(1-x)] = -y^{(x)+ky^\wedge(1-x)},$$

где C – оператор Коши. Таким образом, имеет место формула

$$TL = CT, \Rightarrow L = T^{-1}CT$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия АН ОК. Серия физ. мат. – 2000. – № 3. – С. 29-34.

2 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 329 с.

3 Леонтьев А.Ф Целые функций. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

REFERENCES

1 Kal'menov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. O strukture spektra kraevoj zadachi Shturma-Liuvillja na konechnom otrezke vremeni // Izvestija AN OK. Serija fiz. mat. 2000. № 3. S. 29-34.

2 Marchenko V.A. Operatory Shturma-Liuvillja i ih prilozhenija. Kiev: Naukova dumka, 1977. 329 s.

3 Leont'ev A.F Celye funkcij. Rjady jeksponent. M.: Nauka, 1983. 176 s.

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ВОЛЬТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ҰҚСАСТЫҒЫ

Бұл еңбекте Штурм-Лиувиллдің барлық волтерлі шекаралық есептерінің Коши есебіне ұқсас екені көрсетілген.

Тірек сөздер: ұқсастық, вольтерлі операторлар, Штурм-Лиувилл.

Summary

A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orazov

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

ON THE SIMILARITIES BETWEEN VOLTERRA STURM-LIOUVILLE

In the real work it is proved that all volterrovy regional problems of Storm Liouville are similar to Cauchy's task.

Keywords: resemble, voltaire’s operators, Shturm-Liuvill.

Поступила 15.10.2013г.